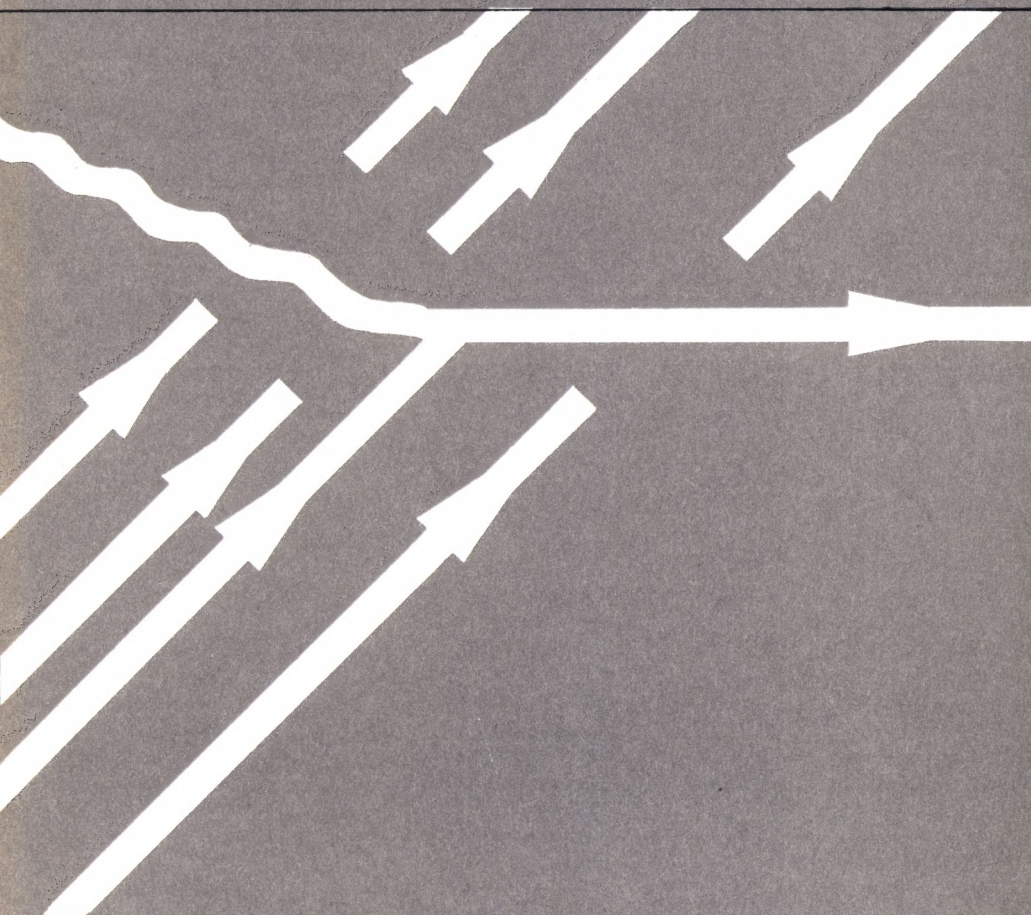


Ф.Индурайн

Квантовая
хромодинамика



Издательство «Мир»

Квантовая хромодинамика

Введение в теорию кварков и глюонов

F. J. Yndurain

Quantum Chromodynamics

An Introduction to the Theory
of Quarks and Gluons

Springer-Verlag
New York Berlin
Heidelberg Tokyo
1983

Ф. Индурайн

Квантовая хромодинамика

Введение в теорию кварков и глюонов

Перевод с английского

А.А. БЫКОВА

под редакцией

д-ра физ.-мат. наук И.М. Дремина



Москва
«Мир» 1986

ББК 22.382

И60

УДК 539. 12

Индурайн Ф.

И60 Квантовая хромодинамика: Введение в теорию кварков и глюонов: Пер. с англ. — М.: Мир, 1986 — 288 с., ил.

Книга испанского физика Ф. Индурайна представляет собой курс современной теории сильных взаимодействий — квантовой хромодинамики. Она содержит практически весь основной материал, необходимый для ознакомления с важнейшими результатами, полученными в рамках пертурбативной КХД, и овладения вычислительными методами теории. Материал изложен с приведением всех промежуточных выкладок и с большим педагогическим мастерством, что позволяет использовать книгу в качестве учебного или справочного пособия.

Книга предназначена для научных работников, студентов и аспирантов физических факультетов, специализирующихся в области физики элементарных частиц.

И 1704070000 — 149
041(01) — 86 73 — 86, ч. 1

ББК 22.382
530.4

Редакция литературы по физике

© by Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1983
All Rights Reserved. Authorized translation from
English language edition published by Springer-
Verlag New York — Berlin — Heidelberg — Tokyo
© перевод на русский язык, дополнения, исправ-
ления, "Мир", 1986.

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Термин "квантовая хромодинамика" (КХД) стал одним из самых популярных в физической литературе, посвященной взаимодействиям частиц. Так называется теория взаимодействий кварков и глюонов — основных составляющих сильновзаимодействующих частиц (адронов). Фактически КХД является единственным серьезным кандидатом, претендующим на описание структуры адронов и процессов их соударений.

Историю КХД можно разделить на три десятилетних этапа. Около 30 лет назад (в 1954 г.) были сформулированы основы неабелевых калибровочных теорий — фундамент КХД. Понятий "кварк" и "глюон" тогда еще не существовало. Они появились спустя десять лет и вначале никак не связывались с математическим аппаратом неабелевых теорий, казавшимся в то время чисто формальным. Понадобилось еще почти десятилетие, чтобы синтез этих двух идей привел к формулировке КХД — существенно нелинейной теории взаимодействия кварков и глюонов — объектов, не наблюдавшихся в свободном состоянии, но входящих в состав адронов и полностью определяющих их взаимодействия.

Существенная нелинейность теории, проявляющаяся в самодействии глюонов, приводит к важным физическим следствиям. Одним из них является свойство "асимптотической свободы", т.е. уменьшение "константы" взаимодействия кварков и глюонов при их сближении до очень малых расстояний. Оно играет важную роль в процессах с большой передачей импульса и облегчает ретикам задачу вычисления характеристик таких процессов, допуская применение методов теории возмущений.

Вместе с тем на "больших" расстояниях (≥ 1 ферми = 10^{-13} см), видимо, эта же нелинейность приводит к таким силам между кварками и глюонами, которые не позволяют этим объектам появляться в свободном состоянии. Именно трактовка эффектов, связанных с большими расстояниями, является "камнем преткновения" КХД; с нею связаны основные нерешенные проблемы. А важность этих проблем нельзя недооценивать. Даже в упомянутых выше "жестких" процессах с большой передачей импульса между кварками или глюонами в экспериментах наблюдаются лишь их совокупности — адроны, а не кварки и глюоны сами по себе. Значит, процесс перехода от языка кварков и глюонов к языку физических адронных состояний должен быть строго описан в рамках теории. Но эти превращения происходят на достаточно больших расстояниях, где в нашем распоряжении пока нет адекватного математического метода решения уравнений квантовой хромодинамики.

Таким образом, квантовая хромодинамика еще находится в периоде становления. Вместе с тем многие важные вопросы здесь уже выяснены, и полученные теоретические результаты применяются при интерпретации и описании экспериментальных данных. Книга Ф. Индурайна подводит итог десятилетнему этапу развития КХД, достаточно полно отражая все успехи и пока еще не поддающиеся решению проблемы.

Поскольку эта книга возникла в результате обработки лекций, читавшихся студентам, изложение в ней построено по принципу перехода от простого к сложному с подробным разъяснением всех вновь вводимых понятий. Предполагается, что читатель уже знаком с основами квантовой теории поля. Используется стандартная операторная формулировка квантовой хромодинамики и лишь в конце книги уделено некоторое место функциональным методам. Естественно, что при сравнительно небольшом объеме книги автору пришлось ограничиться наиболее разработанными частями КХД.

Две главы книги отведены применениям КХД к жестким процессам и к структуре адронов, т.е. помимо расчетов по теории возмущений автору приходится упоминать и о методах, выходящих за ее рамки. Однако многие из них еще не доросли до того уровня, который позволил бы включить их в учебную литературу, поэтому они лишь кратко упоминаются. Читателю, желающему подробнее ознакомиться с этими подходами (например, с решеточными моделями, с $1/N$ -разложением и т.п.), придется обращаться к обзорным статьям в журналах или же к другим более специализированным пособиям по квантовой хромодинамике. Сейчас уже имеется около десяти книг на русском языке, которые в той или иной мере касаются вопросов, рассматриваемых в книге Индурайна, трактуя их иногда под несколько другим углом зрения. Поэтому можно сказать, что учебная литература по взаимодействиям кварков и глюонов достаточно обширна, чтобы подвести читателя к изучению обзорных и оригинальных статей по затрагиваемым здесь проблемам. Несомненно, книга Индурайна займет в ней одно из центральных мест.

Она будет весьма полезна студентам старших курсов и аспирантам, специализирующимся по теории взаимодействий частиц, при изучении ими современных методов расчета в квантовой теории поля. Конечно, и специалисты, уже активно работающие в этих направлениях, будут использовать ее как краткое справочное пособие по основам квантовой хромодинамики и ее приложениям ко многим адронным процессам на современном этапе развития этой бурно прогрессирующей области физики.

Для издания на русском языке автор несколько переработал и дополнил отдельные главы книги с учетом последних достижений квантовой хромодинамики. При переводе были устранены замеченные неточности и опечатки. В ряде мест даны небольшие примечания, поясняющие мысль автора или используемую терминологию.

И.М. Дремин

ПРЕДИСЛОВИЕ

Около тридцати лет назад, в 1954 г., Янг и Мидлс опубликовали результаты своих исследований по теории калибровочных полей [276]. Сейчас можно почти с уверенностью сказать, что развитая на этой основе неабелева калибровочная теория — квантовая хромодинамика — способна адекватно описывать процессы, происходящие при сильных взаимодействиях частиц. И хотя мы еще не до конца понимаем содержание квантовой хромодинамики, но уже получены важные теоретические результаты, многие из которых подтверждены экспериментально, позволяющие дать последовательную и непротиворечивую интерпретацию КХД.

Конечно, любое изложение КХД нельзя считать полным, так как сама теория еще развивается. Это нашло свое отражение в выборе вопросов, рассмотренных в книге. Я пытался обсуждать только те аспекты теории, трактовка которых, по-видимому, не изменится в будущем. В частности, рассматривались только те результаты, вывод которых из "первых принципов" требует минимального числа произвольных допущений. Несомненно, мои личные склонности также повлияли на выбор излагаемого материала. Любой из нас неизбежно стремится уделить больше внимания предмету, с которым он хорошо знаком, и избежать обсуждения вопросов, в которых он не является специалистом. Я не буду останавливаться на перечислении тех вопросов, которые, может быть, следовало включить в книгу (см. § 46)¹⁾. Список литературы должен в некоторой степени восполнить эти пробелы.

Данная книга возникла из цикла лекций, которые я в течение нескольких последних лет читал студентам старших курсов. Она отражает вводный и педагогический характер этих лекций. Я попытался написать логически замкнутый текст, в котором по возможности не было бы выражений типа "можно показать, что ..." или "как хорошо известно, ...". Однако я предполагал, что читатель знаком с основными понятиями теории поля и методами феноменологического описания элементарных частиц; при этом я не сомневался также, что иногда ему все-таки придется обращаться за помощью к литературе.

¹⁾ Больше всего я жалею о том, что опускаю рассмотрение КХД на решетке. В то время, когда я писал первоначальный вариант этой книги, КХД на решетке еще не испытала того бурного развития, свидетелями которого мы являемся в последнее время. К сожалению, детальное изложение этого раздела хромодинамики вызвало бы чрезмерную задержку сроков публикации книги.

Конечно, данная книга во многом обязана оригинальным статьям и обзорам по квантовой хромодинамике; все это отражено в ссылках. Я искренне признателен моим коллегам А. Гонсалес-Арройо, К. Бекши, С. Нарисону, Дж. Барнабью, Е. де Рафазлю, Р. Таррачу и в особенности К. Лопесу и П. Паскьюзлю (указавшим на ряд ошибок в первоначальном варианте книги) и многим другим за многочисленные полезные обсуждения. Я хочу также выразить благодарность А. Малене за неоценимую помощь в подготовке рукописи к печати.

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

§ 1. Как возникла квантовая хромодинамика

Квантовая хромодинамика (КХД) возникла в результате развития кварковой модели. В начале шестидесятых годов было установлено, что адроны можно классифицировать по представлениям группы $SU_F(3)$, которая теперь называется $SU_F(3)$ -группой аромата [136, 211]. Такая классификация обладала рядом интересных особенностей. Прежде всего в ней фигурировали только некоторые довольно специфические представления этой группы. При добавлении группы спиновых вращений $SU(2)$ к группе внутренней симметрии $SU_F(3)$ они образовывали представления группы $SU(6)$ [163, 214]. Но фундаментальные представления ни для группы $SU_F(3)$, ни для группы $SU(6)$ (3 и $\bar{3}$ для $SU_F(3)$), по-видимому, не обнаруживаются в природе. Это заставило Гелл-Манна [138] и Швейга [282] постулировать, что физические адроны не элементарны, а состоят из трех *кварков* (барионы) или кварка и антикварка (мезоны). Теперь хорошо известны три сорта, или *аромата*, кварков, входящих в состав обычных адронов. Они получили следующие обозначения: u (up — верхний), d ($down$ — нижний), s ($strange$ — странный); первые два кварка несут квантовые числа изоспина, а s -кварк — квантовое число странности. Было установлено, что в природе встречаются именно те представления группы $SU_F(3)$, которые можно получить редукцией произведений $3 \times 3 \times 3$ (барионы) или 3×3 (мезоны); при учете спина кварков, равного $1/2$, возникает схема $SU(6)$. В дополнение к этому разности масс адронов можно объяснить, если предположить, что массы кварков удовлетворяют соотношениям

$$m_d - m_u \approx 4 \text{ МэВ}, \quad m_s - m_d \approx 150 \text{ МэВ} \quad (1.1)$$

с возможными электромагнитными радиационными поправками. Электрический заряд кварков, измеренный в долях заряда протона, оказывается дробным:

$$Q_u = \frac{2}{3}, \quad Q_d = Q_s = -\frac{1}{3}. \quad (1.2)$$

Гипотеза составных адронов имела и другие положительные стороны. Например, известно, что магнитный момент протона равен $\mu_p = 2,79 \times e\hbar/2m_p$, тогда как, если бы протон был элементарен, его значение было бы равно $\mu_p = e\hbar/2m_p$. Значение же магнитного момента протона, вы-

численное в кварковой модели, находится в хорошем согласии с экспериментальными результатами.

Эти успехи дали начало широкому поиску кварков, который продолжается и по сей день. Свободные кварки пока не обнаружены, но в результате этих опытов установлена *нижняя* граница массы свободных кварков (порядка гигаэлектронвольт), которая свидетельствует о том, что адроны представляют собой сильно связанные состояния кварков. В отношении этой модели можно выдвинуть по крайней мере два возражения. Во-первых, в основном состоянии составная система обладает нулевым орбитальным моментом. Поэтому резонанс Δ^{++} должен интерпретироваться как состоящий из трех u -кварков:

$$u\uparrow, u\uparrow, u\uparrow, \quad (1.3)$$

(стрелками обозначены спиновые состояния кварков), неподвижных один относительно другого. Однако это абсурдно: поскольку кварки имеют спин $1/2$, они должны подчиняться статистике Ферми — Дирака, а их состояния должны быть антисимметричными по отношению к перестановке любых двух частиц, чего явно нет в случае (1.3). Во-вторых, методами алгебры токов [141, 147, 192] можно вычислить отношения m_s/m_d . Результат

$$m_s/m_d \simeq 20, \quad (1.4)$$

противоречит оценкам (1.1) для конституентных кварков с массами ~ 1 ГэВ.

Возможное решение первого противоречия было предложено Гринбергом [154], предположившим, что кварки подчиняются парастатистике ранга 3. Известно, что такая парастатистика может быть получена из обычной статистики Ферми — Дирака введением нового внутреннего квантового числа¹⁾, которое Гелл-Манн и др. [129, 130] называли *цветом*, так что каждый кварк может находиться в любом из трех цветовых состояний $i = r, y, v$ (red — красный, yellow — желтый, violet — синий). Теперь будем интерпретировать резонанс Δ^{++} как состояние

$$\sum \epsilon^{ikl} (u^i \uparrow, u^k \uparrow, u^l \uparrow),$$

которое полностью антисимметрично по отношению к перестановкам любых двух частиц. При этом отсутствие состояний, скажем, из двух или четырех кварков (так называемых экзотических состояний) можно объяснить, постулировав, что все физически наблюдаемые адроны бесцветны, т.е. представляют собой синглеты по отношению к вращениям в цветовом пространстве:

$$U_c : q^i \rightarrow \sum_k U_c^{ik} q^k, \quad U_c^+ U_c = 1. \quad (1.5)$$

¹⁾ Такое внутреннее квантовое число было введено в работе [165].

Если детерминант этих преобразований положить равным единице, чтобы исключить тривиальную полную фазу, то они образуют группу, а именно цветовую группу $SU_c(3)$. Теперь синглетное представление появляется только в произведениях $3_c \times 3_c \times 3_c$ (барионы) или $3_c \times \bar{3}_c$ (мезоны), и этим объясняется, почему мы имеем обычные частицы и не имеем "экзотических", не наблюдаемых в природе.

Мы пока не станем обсуждать путей разрешения второй трудности, а вместо этого еще более обострим ситуацию, перейдя к алгебре токов. Если кварки элементарны, из них следует построить *токи*. Так, электромагнитный ток записывается в виде

$$J_{em}^\mu = \frac{2}{3} \bar{u} \gamma^\mu u - \frac{1}{3} \bar{d} \gamma^\mu d - \frac{1}{3} \bar{s} \gamma^\mu s + \frac{2}{3} \bar{c} \gamma^\mu c, \quad (1.6 \text{ а})$$

а слабый заряженный ток (θ_c — угол Кабиббо) в виде

$$J_2^\mu = \bar{u} \gamma^\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} d_\theta + \bar{c} \gamma^\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} s_\theta, \quad (1.6 \text{ б})$$

$$d_\theta = d \cos \theta_c + s \sin \theta_c; \quad s_\theta = -d \sin \theta_c + s \cos \theta_c.$$

Здесь подразумевается суммирование по опущенным цветовым индексам и учтен вклад кварка c (charmed — очарованный). Гель-Манн [137, 139] постулировал, что на малых расстояниях коммутационные соотношения между этими токами такие, как если бы входящие в них кварковые поля были свободны и описывались лагранжианом вида

$$\mathcal{L}_{\text{quarks}} \approx \mathcal{L}_0(x) = \sum_{q=u,d,\dots} \sum_j \bar{q}^j(x) (i\partial - m_q) q^j(x). \quad (1.7)$$

Трудно было понять, как может быть реализована столь странная гипотеза, но именно она привела к замечательному успеху в правилах сумм Адлера — Вайссбергера, Кабиббо — Радикати и при вычислениях Ширлином и другими радиационных поправок к β -распаду ядер.

К другому взгляду на кварковую модель приводят эксперименты по глубоконеупругому рассеянию. Виртуальный фотон или W -бозон с большой инвариантной массой Q^2 и высокой энергией ν рассеивается на некоторой мишени (например, на протоне). При этом получается удивительный результат (предсказанный Бьеркенем [39]) — сечение рассеяния имеет вид

$$\frac{d\sigma}{d\Omega dk'_0} = \frac{\alpha}{4m_p k_0^2 \sin^4 \theta/2} \left\{ W_2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2W_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\}, \quad (1.8 \text{ а})$$

и если написать

$$\begin{aligned} f_1(x, Q^2) &= 2xW_1, \\ f_2(x, Q^2) &= \frac{\nu}{m_p^2} W_2, \\ x &= Q^2/\nu, \end{aligned} \quad (1.8 \text{ б})$$

$$\int d^4z \langle p | [J^\mu(z), J^\nu(0)] | p \rangle e^{iq \cdot z} \approx -g^{\mu\nu} W_1 + \frac{1}{m_p^2} p^\mu p^\nu W_2,$$

то функции f_i почти не зависят от Q^2 при $Q^2 \rightarrow \infty$, когда переменная x имеет фиксированное значение (бёркеновский скейлинг). Фейнман показал, как это можно интерпретировать. Если рассматривать случай Q^2 , $\nu \rightarrow \infty$ (который ввиду (1.8б) означает малые расстояния), то протон должен быть построен из составляющих — "партонов", которые не взаимодействуют между собой. Оставалось сделать только один шаг и отождествить эти партоны с кварками, которые снова оказываются свободными на малых расстояниях. Столь странное поведение кварков казалось загадочным.

Очевидно, что все эти трудности порождены сложной динамикой сильных взаимодействий, и, следовательно, их можно устранить, только построив теорию взаимодействий этого типа. Таким образом, все зависит от того, как взаимодействуют между собой адроны. Замечательный факт адронной физики состоит в том, что, несмотря на разнообразие адронов (взять, например, массы мезонов π и K), взаимодействие между ними (константы связи и сечения рассеяния при высоких энергиях, при которых можно пренебречь разностями масс) не зависит от ароматов. Это означает, что, каковы бы ни были переносчики взаимодействий между кварками, они должны одинаково действовать на кварки всех ароматов.

Тем временем Глешоу, Вайнберг, Салам, Уорд и другие авторы построили единую перенормируемую теорию слабых и электромагнитных взаимодействий. Как показали Вайнберг [257] и Нанопулос [207], чтобы избежать катастрофического нарушения четности уже в первом порядке по константе связи α , сильные взаимодействия должны действовать не на аромат, а на некоторое другое квантовое число. Это было одной из причин, заставивших физиков выдвинуть гипотезу о том, что "склеивающие" кварки частицы (*глюоны*) взаимодействуют только с цветом, которого слабые и электромагнитные взаимодействия не различают (ср. с (1.6)). Берутся восемь векторных глюонов B_a^μ , $a = 1, \dots, 8$, в присоединенном представлении группы $SU_c(3)$, взаимодействующих одинаково с кварками любого аромата. Теперь кварк-глюонный лагранжиан приобретает вид

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_0 + g \sum_q \sum_{ika} \bar{q}^i(x) \gamma_\mu t_{ik}^a q^k(x) B_a^\mu(x); \quad (1.9)$$

здесь лагранжиан \mathcal{L}_0 определен формулой (1.7), а $t^a = \lambda^a/2$, где λ^a — матрицы Гелл-Манна. Последние генерируют фундаментальное представление группы $SU_c(3)$ и удовлетворяют коммутационным соотношениям ¹⁾.

$$[t^a, t^b] = i \sum_c f^{abc} t^c. \quad (1.10)$$

Такой цветовой и векторный характер глюонов имеет еще и то преимущество, что он позволяет объяснить расщепление масс резонанса Δ_{33} и нуклонов [89].

Чтобы продвинуться дальше, нужно понять, что в неабелевой калибровочной теории с *безмассовыми* векторными полями (предложенной Янгом и Миллсом [276]) имеются скрытые инфракрасные сингулярности, которые могут препятствовать появлению свободных кварков и глюонов. Таким образом, можно, наконец, согласовать условия (1.1) и (1.4). Свободные кварки не наблюдаются потому, что они не могут расходиться на большие расстояния вследствие взаимодействия, а не из-за большой массы. Это так называемая гипотеза конфайнмента (удержания). Модифицируем лагранжиан (1.9), введя в него член, описывающий глюонные поля:

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \mathcal{L}_1 - \frac{1}{4} \sum_a G_a^{\mu\nu}(x) G_{a\mu\nu}(x), \quad (1.11)$$

$$G_a^{\mu\nu} = \partial^\mu B_a^\nu - \partial^\nu B_a^\mu + g \sum_{abc} B_b^\mu B_c^\nu.$$

Это дает одно дополнительное преимущество. Во всех неабелевых калибровочных теориях константа связи g автоматически получается универсальной. Выражение (1.11) представляет собой обычный лагранжиан КХД, с которого начнется изложение в следующей главе.

До сих пор все построения были в какой-то мере шаткими. Они состояли из набора предположений, достигших своего полного выражения в формуле (1.11), каждое из которых вводило нас все дальше от реального мира (пионов, протонов и т.д.) в воображаемую область (кварков и глюонов) с набором предсказаний, едва ли численно превосходящим количество предположений. Однако ситуация радикально изменилась в начале семидесятых годов. В это время т'Хофт (неопубликованная работа), Политцер [218] и независимо от них Гросс и Вильчек [160 — 162] доказали, что в теориях с лагранжианом типа (1.11) эффективная константа связи на малых расстояниях стремится к нулю (*асимптотическая свобода*), а на больших растет. Таким обра-

¹⁾ Теоретико-групповые соотношения приведены в приложении В. Цветовые индексы мы записываем произвольно в виде верхних или нижних индексов: $f^{abc} = f_{abc}$, $t_{ik}^a = t_{ik}^a$ и т.д.

зом, они одновременно объяснили успехи алгебры токов и партонной модели, а также доказали возможность возникновения конфайнмента. Кроме того, оказалось возможным вычислить поправки к расчетам, проведенным в приближении свободных кварков. Результаты, учитывающие такие поправки, систематически согласуются с экспериментальными данными в пределах точности вычислений (и самих экспериментальных данных). В общем весьма вероятно, что КХД адекватно описывает процессы, происходящие при сильных взаимодействиях частиц¹⁾.

Другим важным свойством КХД, которое, пожалуй, недостаточно подчеркивается при изложении хромодинамики, является *локальный характер КХД как теории поля*, что приводит (по крайней мере, если конфайнмент действительно имеет место) к локальным наблюдаемым. Точнее картина такова. Поля, являющиеся точными решениями уравнений движения, соответствующих лагранжиану (1.11), определены в гильбертовом пространстве \mathcal{H}_{QCD} , состоящем из кварковых и глюонных векторов состояний, и строятся, например, по теории возмущений. Кварки и глюоны представлены локальными полями $q(x)$ и $B(x)$. Если гипотеза конфайнмента справедлива, то существует подпространство \mathcal{H}_{RH} , которое содержит физические состояния. Иными словами, если точно решить уравнения теории, то сохранятся только синглетные по цвету операторы. К ним относятся *токи* типа

$$\sum \bar{q}^i \gamma^\mu (1 \pm \gamma_5) q^i,$$

и другие составные операторы: операторы для π -мезона или для протона

$$\sum \bar{u}^i \gamma_5 d^i, \quad \sum \epsilon^{ijk} u^i u^j d^k$$

и т.д. Дело в том, что эти операторы локальны, хотя они и составные; если модель верна, то наблюдаемые операторы в физическом гильбертовом пространстве \mathcal{H}_{RH} тоже локальны. Это существенно при выводе²⁾ всех стандартных результатов "старомодной" адронной физики — дисперсионных соотношений при фиксированном t , ограничений типа фруассаровского предела и т.д., которые, будучи проверены экспериментально, привели к впечатляющим успехам.

Отметим еще одно преимущество КХД, хотя оно и носит более умозрительный характер, чем упомянутые выше. КХД допускает естественное обобщение до теории Великого объединения. Поскольку $SU_c(3)$ — более широкая группа, чем стандартная электрослабая группа $SU(2) \times U(1)$, при некотором

¹⁾ Скептическая точка зрения содержится в работе [220].

²⁾ См. работы [44, 111], в которых можно найти ссылки на соответствующую литературу.

масштабе энергий все константы связи могут стать равными по величине. Пока этот масштаб энергий (10^{14} ГэВ) намного выше экспериментальных возможностей, и предсказания моделей Великого объединения не противоречат существующим экспериментальным результатам.

§ 2. Теория возмущений, S -матрица и функции Грина; теорема Вика

В этом параграфе очень кратко рассматриваются основные вопросы релятивистской теории поля. Конечно, изложить теорию поля сколько-нибудь детально в столь малом объеме невозможно. Поэтому настоящий параграф служит главным образом для того, чтобы ввести необходимые обозначения и наметить в общих чертах круг вопросов, знакомство с которыми необходимо для понимания материала, излагаемого ниже. Подробное изложение теории квантованных полей содержится, например, в книгах [40, 45, 172].

Теория поля определяется заданием соответствующего лагранжиана. Если Φ_i — поля, фигурирующие в теории, то лагранжиан является функцией от полей Φ_i и их пространственно-временных производных $\partial\Phi_i$. *Лагранжиан* \mathcal{L} (в действительности \mathcal{L} представляет собой плотность лагранжевой функции) принято разбивать на два слагаемых \mathcal{L}_0 и \mathcal{L}_{int} ; при этом член \mathcal{L}_0 описывает динамику свободных полей (он получается из лагранжиана \mathcal{L} , если принять все взаимодействия равными нулю), а член \mathcal{L}_{int} , который определяется как разность $\mathcal{L}_{\text{int}} \equiv \mathcal{L} - \mathcal{L}_0$, описывает взаимодействия между полями. Например, в квантовой хромодинамике полный лагранжиан выражается в виде (1.11), а лагранжиан свободных полей записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 = & \sum_q \bar{q}(x)(i\partial - m_q)q(x) - \frac{1}{4} \sum_a (\partial^\mu B_a^\nu(x) - \partial^\nu B_a^\mu(x)) \\ & \times (\partial_\mu B_{a\nu}(x) - \partial_\nu B_{a\mu}(x)). \end{aligned}$$

Кроме основных, или элементарных, полей Φ_i , фигурирующих в теории (в случае КХД это поля q для кварков и B для глюонов), часто встречаются *составные операторы* (как правило, это локальные комбинации полей Φ_i), т.е. комбинации, содержащие произведения *конечного* числа полей Φ_i и их производных, взятых в одной и той же точке x . Например, в КХД используются операторы *токов* $\bar{q}(x)\gamma^\mu q(x)$. Конечно, и сам лагранжиан $\mathcal{L}(x)$ является составным локальным оператором.

Из локальных полей или из локальных операторов (элементарных или составных) можно образовать новые локальные операторы. Самый простой способ заключается в обычном перемножении операторов. Но имеются два других типа произведений, которые будут неоднократно рассматриваться в дальнейшем, — *виковское* и *хронологическое произведения* локальных операторов. Для свободных полей *виковское*, или *нормальное*, произведение оп-

ределяется следующим образом. Разложим поля Φ_i по операторам рождения и уничтожения. Результат имеет вид

$$\Phi_i(x) = \sum_n C_i^{(n)}(x) a_n + \sum_n \bar{C}_i^{(n)}(x) \bar{a}_n^+,$$

где операторы a и \bar{a} могут совпадать или не совпадать. Например, если поля Φ отождествить с кварковыми полями q , то их разложение имеет вид

$$q(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\sigma} \int \frac{d\vec{p}}{2p^0} \{ e^{-ip \cdot x} u(p, \sigma) a(p, \sigma) + e^{ip \cdot x} v(p, \sigma) \bar{a}^+(p, \sigma) \},$$

где u и v — обычные дираковские спиноры, а a^+ (\bar{a}^+) — операторы рождения частиц (античастиц). Виковское произведение $:\Phi_1(x_1)\Phi_2(x_2):$ получается перестановкой всех операторов рождения левее всех операторов уничтожения. При перестановках учитываются коммутационные (антикоммутационные) соотношения между бозонными (фермионными) операторами. В результате получается

$$\begin{aligned} :\Phi_1(x_1)\Phi_2(x_2): &\equiv \sum_{n,n'} \{ C_1^{(n)}(x_1) C_2^{(n')}(x_2) a_n a_{n'} + \bar{C}_1^{(n)}(x_1) \bar{C}_2^{(n')}(x_2) \bar{a}_n^+ \bar{a}_{n'}^+ \\ &+ \bar{C}_1^{(n)}(x_1) C_2^{(n')}(x_2) \bar{a}_n^+ a_{n'} + (-1)^{\delta} C_1^{(n)}(x_1) \bar{C}_2^{(n')}(x_2) \bar{a}_n^+ a_n \}, \end{aligned}$$

Здесь $\delta = 1$ для фермионов и $\delta = 0$ для бозонов.

Обобщение определения виковского произведения на большее число сомножителей $:\Phi_1(x_1) \dots \Phi_n(x_n):$ или на виковское произведение от других виковских произведений типа $:(\Phi_1(x_1)\Phi_2(x_2)):(\Phi_3(x_3)\Phi_4(x_4)):$ производится непосредственно. Рецепт состоит в следующем: поля разлагают по операторам рождения и уничтожения и, учитывая коммутационные соотношения, переписывают выражение так, чтобы операторы рождения стояли левее операторов уничтожения.

Нетрудно проверить, что виковское произведение локальных операторов, взятых в одной и той же точке, тоже локально¹⁾, т. е. если операторы O_1, \dots, O_n локальны, то и виковское произведение этих операторов $:O_1(x) \dots O_n(x):$ локально.

Еще одним важным свойством виковского произведения является его регулярность. Иными словами, для любых состояний a и b матричные элементы от виковского произведения $\langle a | :O_1(x_1) \dots O_n(x_n) : | b \rangle$ являются регулярными функциями переменных x_1, \dots, x_n .

Хронологическое произведение, или *T-произведение*, локальных (элементарных или составных) операторов $O_1(x_1) \dots O_n(x_n)$ определяется следу-

¹⁾ Оператор $O_{\alpha}(x)$ называется локальным, если при преобразованиях Пуанкаре он преобразуется по формуле $U(a, \Lambda) O_{\alpha}(x) U^{-1}(a, \Lambda) = \sum P_{\alpha\alpha'}(\Lambda) O_{\alpha'}(\Lambda x + a)$ и коммутирует сам с собой в разных пространственных точках.

шим образом:

$$TO_1(x_1) \dots O_n(x_n) \equiv T \{ O_1(x_1) \dots O_n(x_n) \} = (-1)^\delta O_{i_1}(x_{i_1}) \dots O_{i_n}(x_{i_n}).$$

В правой части этого выражения операторы расположены в такой последовательности, что их временные аргументы удовлетворяют условию $x_{i_1}^0 \geq x_{i_2}^0 \geq \dots \geq x_{i_n}^0$, а параметр δ равен числу перестановок индексов, соответствующих фермионным операторам, которые необходимо выполнить, чтобы из исходной последовательности $1, \dots, n$ составить последовательность i_1, \dots, i_n . Иначе говоря, хронологическое произведение $TO_1(x_1) \dots O_n(x_n)$ можно получить, переставляя операторы так, чтобы их временные аргументы образовывали невозрастающую последовательность, учитывая при этом коммутационные (антикоммутационные) соотношения для бозонных (фермионных) операторов. Например, для двух сомножителей $q_1(x)$ и $q_2(y)$ получаем

$$Tq_1(x)q_2(y) = \theta(x^0 - y^0)q_1(x)q_2(y) - \theta(y^0 - x^0)q_2(y)q_1(x)$$

или

$$Tq_1(x)B_2(y) = \theta(x^0 - y^0)q_1(x)B_2(y) + \theta(y^0 - x^0)B_2(y)q_1(x)$$

Следует помнить, что бозонные и фермионные операторы всегда коммутируют и хронологическое произведение операторов релятивистски инвариантно.

S -матрица представляет собой оператор, переводящий векторы, отвечающие свободным состояниям системы в момент времени $t = -\infty$, в векторы, отвечающие свободным состояниям этой системы в момент времени $t = +\infty$. S -матрица может быть получена из лагранжиана взаимодействия при помощи формулы Мэттьюса

$$S = T \exp i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{int}}^0(x). \quad (2.1 \text{ a})$$

Здесь $\mathcal{L}_{\text{int}}^0(x)$ — лагранжиан взаимодействия, выраженный через нормально упорядоченные произведения полей, удовлетворяющих тем же коммутационным соотношениям, что и *свободные* поля. Хронологическая экспонента представляет собой формальное выражение, фактически определяемое разложением в ряд:

$$\begin{aligned} S &= T \exp i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{int}}^0(x) \\ &\equiv 1 + i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{int}}^0(x) + \dots \\ &\quad + \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n T \mathcal{L}_{\text{int}}^0(x_1) \dots \mathcal{L}_{\text{int}}^0(x_n) + \dots \end{aligned} \quad (2.1 \text{ б})$$

Часто вместо матричных элементов S -матрицы будут рассматриваться матричные элементы токов (или произведений токов), а также матричные эле-

менты составных операторов более общего вида. Их можно получить, введя в лагранжиан взаимодействия $\mathcal{L}_{\text{int}}^0$ вспомогательные члены. Предположим, например, что рассматривается матричный элемент вида

$$\langle a | T J_1^\mu(x) J_2^\nu(y) | b \rangle, \quad (2.2)$$

где J — слабые или электромагнитные токи (см. формулу (1.6)). Для этого заменим лагранжиан \mathcal{L}_{int} следующим выражением:

$$\mathcal{L}_{\text{int}}^\phi = \mathcal{L}_{\text{int}} + J_{1\mu}(x)\phi_1^\mu(x) + J_{2\mu}(x)\phi_2^\mu(x), \quad (2.3)$$

в котором поля ϕ являются c -числовыми вспомогательными полями. Разлагая в ряд, получаем

$$\begin{aligned} & \langle a | T \exp i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{int}}^\phi(x) | b \rangle \\ &= \langle a | b \rangle + i \langle a | \int d^4x \left\{ \mathcal{L}_{\text{int}}^0(x) + \sum_i J_{i\mu}^0(x) \phi_i^\mu(x) \right\} | b \rangle \\ &+ \dots + \frac{i^n}{n!} \langle a | \int d^4x_1 \dots d^4x_n T \\ &\times \left\{ \mathcal{L}_{\text{int}}^0(x_1) + \sum_i J_{i\mu}^0(x_1) \phi_i^\mu(x_1) \right\} \times \dots \\ &\times \left\{ \mathcal{L}_{\text{int}}^0(x_n) + \sum_i J_{i\mu}^0(x_n) \phi_i^\mu(x_n) \right\} | b \rangle + \dots \end{aligned}$$

Предположим, что поля ϕ бесконечно малы, и сохраним в разложении только члены порядка $O(\phi)$ и $O(\phi^2)$. Последние имеют вид

$$\begin{aligned} & \frac{i^n}{n!} \langle a | \int d^4x_1 \dots d^4x_n \sum_{ij} T \mathcal{L}_{\text{int}}^0(x_1) \dots [\mathcal{L}_{\text{int}}^0(x_i)] \dots \\ & \times [\mathcal{L}_{\text{int}}^0(x_j)] \dots \mathcal{L}_{\text{int}}^0(x_n) J_{1\mu}^0(x_i) J_{2\nu}^0(x_j) | b \rangle \phi_i^\mu(x_i) \phi_j^\nu(x_j); \end{aligned}$$

здесь символ $[\mathcal{L}]$ означает, что член, заключенный в скобки, опущен. Записывая поля ϕ в виде $\phi_{i\mu}(x) = \epsilon_{i\mu} \delta(x - y_i)$, дифференцируя по переменным ϵ_1 и ϵ_2 и полагая $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$, получаем уравнение Гелл-Манна — Лоу

$$\begin{aligned} \langle a | T J_1^\mu(x) J_2^\nu(y) | b \rangle &= \frac{\delta^2}{\delta \phi_{1\mu}(x) \delta \phi_{2\nu}(y)} \\ &\times \langle a | T \exp i \int d^4z \left\{ \mathcal{L}_{\text{int}}^0(z) + \sum_i J_{i\lambda}^0(z) \phi_i^\lambda(z) \right\} | b \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \langle a | \int d^4x_1 \dots d^4x_n T \mathcal{L}_{\text{int}}^0(x_1) \dots \\ &\times \mathcal{L}_{\text{int}}^0(x_n) J_1^{0\mu}(x) J_2^{0\nu}(y) | b \rangle. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Для того чтобы приравнять правую часть (2.4) матричному элементу (2.2), использована формула (доказанная Боголюбовым и Ширковым [45], см. также § 39 и 42; определение функциональной производной дано в приложении 3)

$$\left. \frac{\delta^2 S_\phi}{\delta \phi_{1\mu}(x) \delta \phi_{2\nu}(y)} \right|_{\phi=0} = TJ_1^\mu(x) J_2^\nu(y). \quad (2.5)$$

Рассмотрим вопрос о релятивистской инвариантности и унитарности S -матрицы. Если оператор $U(a, \Lambda)$ осуществляет некоторое преобразование из группы Пуанкаре, то должно выполняться соотношение

$$U(a, \Lambda) S U^{-1}(a, \Lambda) = S, \quad (2.6)$$

из которого следует, что S -матрица представляет собой релятивистски инвариантный оператор. S -матрица является также унитарным оператором:

$$S^+ S = S S^+ = 1. \quad (2.7)$$

Записав выражение для S -матрицы в виде

$$S = 1 + i\mathcal{T},$$

где матричные элементы $\langle a | \mathcal{T} | b \rangle$ представляют собой так называемую амплитуду перехода системы из состояния $|a\rangle$ в состояние $|b\rangle$, получим из (2.7) соотношение для оператора \mathcal{T}

$$\text{Im} \langle a | \mathcal{T} | b \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\text{all } c} \langle c | \mathcal{T} | b \rangle \langle c | \mathcal{T} | a \rangle^*. \quad (2.8)$$

(При выводе соотношения (2.8) предполагалась инвариантность S -матрицы по отношению к обращению времени.) При разложении левой и правой частей (2.6) и (2.8) по степеням константы связи g в каждом порядке теории возмущений возникают определенные соотношения. В силу линейности уравнение (2.6) сохраняет свой вид в каждом порядке разложения по константе связи g . Нелинейность же уравнения (2.8) приводит к смешиванию членов разного порядка малости по константе связи. Например, если написать

$$\mathcal{T} = g \sum_{n=0}^{\infty} g^n \mathcal{T}_n,$$

то, ограничиваясь членами второго порядка малости по g , имеем

$$\begin{aligned} \text{Im} \langle a | \mathcal{T}_2 | b \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\text{all } c} \{ & \langle c | \mathcal{T}_0 | b \rangle \langle c | \mathcal{T}_2 | a \rangle^* \\ & + \langle c | \mathcal{T}_2 | b \rangle \langle c | \mathcal{T}_0 | a \rangle^* \\ & + \langle c | \mathcal{T}_1 | b \rangle \langle c | \mathcal{T}_1 | a \rangle^* \}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Завершим краткий обзор основных вопросов теории поля введением *редукционных соотношений*. Рассмотрим амплитуду рассеяния, например для процесса $a + b \rightarrow a' + b'$, где a и a' — бозоны, описываемые полями Φ_a и $\Phi_{a'}$. Амплитуду рассеяния можно записать в виде

$$\langle a', b' | S | a, b \rangle = \lim_{\substack{t' \rightarrow +\infty \\ t \rightarrow -\infty}} \langle a', b', t' | a, b, t \rangle.$$

Если через p_i обозначить импульс частицы i и использовать формулу (подробный вывод редукционных соотношений содержится, например, в книге Бёркена и Дредла [40])

$$a^+(p_a) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int d\vec{x} e^{-ip_a \cdot x} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 \Phi^+(x),$$

то после некоторых вычислений можно получить *редукционные соотношения* типа

$$\begin{aligned} \langle a', b' | S | a, b \rangle &= \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4x e^{-ip_a \cdot x} \\ &\times (\partial^2 + m_a^2) \langle a', b' | \Phi_a^+(x) | b \rangle. \end{aligned}$$

Мы не будем выводить редукционных соотношений или выписывать их полный набор, который можно найти в книге [40], но приведем лишь несколько типичных примеров их использования. Если кроме бозона a "редуцировать" также бозон a' , то получается соотношение

$$\begin{aligned} \langle a', b' | S | a, b \rangle &= \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \times \frac{-i}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4x \int d^4y e^{-ip_a \cdot x} e^{ip_{a'} \cdot y} \\ &\times (\partial_x^2 + m_a^2)(\partial_y^2 + m_{a'}^2) \langle b' | T \Phi_{a'}(y) \Phi_a^+(x) | b \rangle. \end{aligned}$$

В результате применения редукционных соотношений в конечном счете получаем фурье-образ от вакуумного среднего T -произведения четырех операторов полей

$$\langle 0 | T \Phi_a(y) \Phi_{b'}(z) \Phi_a^+(x) \Phi_b^+(w) | 0 \rangle.$$

Обобщение этой процедуры на случай спинорных или векторных полей производится весьма просто. Например, заменяя скалярную частицу a на фермион с импульсом p_a и спином σ и обозначая соответствующее ему поле буквой ψ , получаем

$$\langle a', b' | S | (p_a, \sigma), b \rangle = \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4x \langle a', b' | \bar{\psi}(x) | b \rangle (\overleftarrow{i}\partial + m_a) u(p, \sigma) e^{-ip_a \cdot x}.$$

Наконец, перейдем к теореме Вика. Выражения типа (2.1б) позволяют вычислить в каждом порядке теории возмущений элементы S -матрицы

(или матричные элементы токов и гриновские функции). При этом используется теорема Вика. Рассмотрим хронологическое произведение двух свободных полей $T\Phi_1^0(x_1)\Phi_2^0(x_2)$. Поля Φ_i можно разложить по операторам рождения и уничтожения. Такое разложение имеет вид

$$\Phi_i(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\vec{k}}{2k^0} \times \sum_{\sigma} \{ e^{-ik \cdot x} \xi_{+}(k, \sigma) a_{+}(k, \sigma) + e^{ik \cdot x} \xi_{-}(k, \sigma) a_{-}^{+}(k, \sigma) \},$$

где σ обозначает спиновое состояние, ξ_{\pm} — соответствующие волновые функции, а a_{+} и a_{-}^{+} — операторы рождения и уничтожения частиц (+) и античастиц (−). Коммутационные соотношения между операторами (символ [,] для фермионов должен интерпретироваться как антикоммутатор) имеют вид

$$[a_{\pm}(k, \sigma), a_{\pm}^{+}(k', \sigma')] = 2\delta_{\sigma\sigma'} k^0 \delta(\vec{k} - \vec{k}'),$$

$$[a_{+}, a_{-}^{+}] = 0;$$

они могут быть использованы для проверки того, что разность между хронологическим и нормальным произведениями операторов

$$T\Phi_1^0(x_1)\Phi_2^0(x_2) - :\Phi_1^0(x_1)\Phi_2^0(x_2): \equiv \underbrace{\Phi_1^0(x_1)\Phi_2^0(x_2)}$$

представляет собой c -число, называемое *сверткой*. Отсюда видно, что свертка совпадает с вакуумным средним от T -произведения (*пропагатором*):

$$\underbrace{\Phi_1^0(x_1)\Phi_2^0(x_2)} = \langle 0 | T\Phi_1^0(x_1)\Phi_2^0(x_2) | 0 \rangle \equiv \langle T\Phi_1^0(x_1)\Phi_2^0(x_2) \rangle_0.$$

Повторяя эту процедуру многократно, скажем для выражения (2.1), получим, что хронологическое произведение $T\mathcal{L}_{\text{int}}^0 \dots \mathcal{L}_{\text{int}}^0$ можно записать в виде комбинации сверток, умноженных на нормально упорядоченные произведения операторов. Это утверждение и составляет содержание теоремы Вика. Матричные элементы от этих выражений легко вычисляются, и для каждого члена разложения S -матрицы по теории возмущений получается вполне определенный результат. Фейнмановские правила диаграммной техники автоматически учитывают все упомянутые выше требования и позволяют прямо по соответствующим фейнмановским графикам записать окончательный результат. Правила диаграммной техники для квантовой хромодинамики приведены в приложении Г (см. также § 42, в котором некоторые из них выводятся).

КВАНТОВАЯ ХРОМОДИНАМИКА КАК ТЕОРИЯ ПОЛЯ

§ 3. Калибровочная инвариантность

Рассмотрим поля, введенные в гл. I при построении КХД, а именно цветовой триплет кварковых полей $q^i(x)$ для кварка каждого аромата и октет глюонов $B_a(x)$. Кварковые поля образуют фундаментальное представление группы $SU(3)$, т.е. если U — унитарная унимодулярная матрица размерности 3×3 , то поля q^i преобразуются по формуле

$$U : q^i(x) \rightarrow \sum_k U_{jk} q^k(x).$$

Любую матрицу U группы $SU(3)$ можно записать, исходя из восьми генераторов алгебры Ли t^a (матрицы t^a приведены в приложении В), в виде

$$U = \exp \left\{ -ig \sum_a \theta_a t^a \right\},$$

где θ_a — параметры группы, а множитель g введен для удобства. Представляя триплет q^i в виде трехкомпонентного столбца, получаем следующую формулу преобразования:

$$q(x) \rightarrow e^{-ig \sum_a \theta_a t^a} q(x).$$

Для полей B_a ... *представление* (размерности 8) представление группы $SU(3)$. Генераторами группы $SU(3)$ на этом представлении будут матрицы C^a , матричные элементы которых имеют вид $C^a_{bc} = -if_{abc}$ (значения констант f_{abc} приведены в приложении В). Поля B преобразуются по формуле

$$B^\mu(x) \rightarrow e^{-ig \sum_a \theta_a C^a} B^\mu(x).$$

Если параметры группы θ_a представляют собой константы, не зависящие от пространственно-временной точки x , то лагранжиан квантовой хромодинамики, выписанный в гл. I, оказывается инвариантным по отношению к *глобальным* преобразованиям группы $SU(3)$ ¹⁾. Однако, как мы знаем из кван-

¹⁾ Преобразования называют глобальными, если определяющие их параметры группы представляют собой константы, не зависящие от пространственно-временной точки x . — Прим. перев.

товой электродинамики (КЭД), эти преобразования полезно обобщить на случай, когда параметры группы $\theta_a(x)$ зависят от пространственно-временной точки x . При этом (локальные) *калибровочные преобразования* определяются в виде

$$q(x) \rightarrow e^{-ig\Sigma\theta_a(x)\tau^a} q(x). \quad (3.1a)$$

Аналогично обобщаются обычные преобразования КЭД для калибровочных полей:

$$B^\mu(x) \rightarrow e^{-ig\Sigma\theta_a(x)C^a} B^\mu(x) - \partial^\mu\theta(x), \quad (3.1b)$$

или в случае инфинитезимальных преобразований θ

$$\begin{aligned} q^j(x) &\rightarrow q^j(x) - ig \sum_{a,k} \theta_a(x) t_{jk}^a q^k(x), \\ B_a^\mu(x) &\rightarrow B_a^\mu(x) + g \sum_{b,c} f_{abc} \theta_b(x) B_c^\mu(x) - \partial^\mu\theta_a(x). \end{aligned} \quad (3.1v)$$

В дальнейшем будет предполагаться инвариантность лагранжиана КХД относительно преобразований (3.1) (в действительности лагранжиан (1.11) обладает этим свойством по построению). Это требование приводит к тому, что после в лагранжиане появляются в строго определенных комбинациях. Из последующего рассмотрения станет ясно, что лагранжиан (1.11) является фактически наиболее общим лагранжианом, инвариантным по отношению к преобразованиям (3.1) и не содержащим констант размерности массы в *отрицательной* степени (ср. с § 38 и следующими за ним параграфами).

Рассмотрим, как при калибровочных преобразованиях преобразуются производные от полей, например производная $\partial^\mu q(x)$. Из (3.1v) вытекает следующий закон преобразования производной:

$$\begin{aligned} \partial^\mu q^j(x) &\rightarrow \partial^\mu q^j(x) - ig \sum_{jk} t_{jk}^a \theta_a(x) \partial^\mu q^k(x) \\ &\quad - ig \sum_{jk} t_{jk}^a (\partial^\mu \theta_a(x)) q^k(x). \end{aligned}$$

Мы видим, что она преобразуется иначе, чем сами поля. Требование инвариантности лагранжиана по отношению к калибровочным преобразованиям приводит к тому, что все производные от полей должны появляться только в ковариантных комбинациях:

$$D^\mu q^j(x) \equiv \sum_k \left\{ \delta_{jk} \partial^\mu - ig \sum_a B_a^\mu(x) t_{jk}^a \right\} q^k(x); \quad (3.2)$$

здесь D^μ — так называемая (калибровочная) *ковариантная производная*. Легко доказать ковариантный характер производной D^μ . С использованием мат-

ричных обозначений преобразование для ковариантной производной $D^\mu q(x)$ имеет вид

$$\begin{aligned} D^\mu q(x) \rightarrow \partial^\mu q(x) - ig \sum t^a \theta_a(x) \partial^\mu q(x) - ig \sum t^a (\partial^\mu \theta_a(x)) q(x) \\ - g^2 \sum B_a^\mu(x) t^a t^b \theta_b(x) q(x) - ig \sum B_a^\mu(x) t^a q(x) \\ - ig^2 \sum f_{abc} t^a \theta_b(x) B_c^\mu(x) q(x) + ig \sum (\partial^\mu \theta_a(x)) t^a q(x). \end{aligned} \quad (3.3 \text{ а})$$

Учитывая равенства

$$t^a t^b = t^b t^a + [t^a, t^b] \quad [t^a, t^b] = i \sum f^{abc} t^c,$$

правую часть выражения (3.3а) запишем в виде

$$D^\mu q(x) - ig \sum t^a \theta_a(x) D^\mu q(x), \quad (3.3 \text{ б})$$

что и доказывает ковариантный характер преобразования производной $D^\mu q(x)$. Аналогично ковариантный ротор поля B имеет вид ¹⁾

$$(D^\mu \times B^\nu)_a \equiv G_a^{\mu\nu} = \partial^\mu B_a^\nu - \partial^\nu B_a^\mu + g \sum f_{abc} B_b^\mu B_c^\nu. \quad (3.4)$$

Теперь можно записать лагранжиан (1.11) в явно калибровочно-инвариантной форме. Опуская индекс КХД, для лагранжиана \mathcal{L} получаем выражение

$$\mathcal{L} = \sum_q \{ i \bar{q}(x) \not{D} q(x) - m_q \bar{q}(x) q(x) \} - \frac{1}{4} (D \times B)^2. \quad (3.5)$$

Член с $(D \times B)^2$ представляет собой сокращенную запись лагранжиана калибровочных янг-миллсовских полей:

$$(D \times B)^2 \equiv G^2 = \sum_a G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}; \quad \mathcal{L}_{\text{YM}} \equiv - \frac{1}{4} (D \times B)^2.$$

Важность свойства калибровочной инвариантности заключается в следующем. Во-первых, как ясно из доказательства соотношения (3.3), оно требует универсальности константы взаимодействия, т.е. одна и та же константа связи g описывает взаимодействие кварков с глюонами и самодействие последних. Во-вторых, как показал т'Хофт [248], неабелева теория перенормируема только в том случае, если она калибровочно-инвариантна. Наконец, в-третьих, Коулмен и Гросс [73] доказали, что *только* неабелева теория может обладать свойством асимптотической свободы.

На первый взгляд кажется, что выражение (3.5) можно сформулировать на квантовом языке, непосредственно интерпретируя классические поля как квантовые. Однако из квантовой электродинамики известно, что это

¹⁾ Очевидна аналогия тензора $G_a^{\mu\nu}$ с тензором напряженности электромагнитного поля $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$.

не так. Калибровочная инвариантность приводит к тому, что поля B определены не однозначно, так как можно выполнить преобразования типа преобразований (3.1), которые меняют вид коммутационных соотношений. Это происходит потому, что частицы, соответствующие полям B , обладая нулевой массой, имеют только две степени свободы, тогда как сами поля B имеют четыре независимые компоненты. Для того чтобы выполнить квантование, нужно выбрать определенные представления каждого калибровочного класса (*фиксировать калибровку*), что явно нарушает калибровочную инвариантность теории. По сравнению с абелевыми теориями, в которых кванты калибровочного поля не взаимодействуют между собой, самодействие глюонов приводит к дополнительным трудностям. Так, например, лоренц-ковариантные калибровки требуют введения вспомогательных нефизических полей¹⁾ (*духов*), которые восстанавливают калибровочную инвариантность и унитарность. С другой стороны, можно выбрать калибровки, свободные от духов (аксиальные калибровки), но при этом явно нарушается лоренц-инвариантность теории.

Прежде чем рассматривать квантовую теорию, для полноты изложения выпишем уравнения движения для классических полей, соответствующие лагранжиану (3.5). Уравнения движения Эйлера — Лагранжа для поля Φ определяются из условия стационарности *действия* $\bar{Q} = \int d^4x \bar{\mathcal{L}}(x)$, которое записывается в виде

$$\partial_\mu \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} = \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \Phi};$$

и, следовательно, в случае лагранжиана (3.5) приводит к следующим уравнениям движения для полей q и B :

$$\begin{aligned} \bar{q}(x)(i\overleftrightarrow{D} + m) &= 0, & (i\overleftrightarrow{D} - m)q(x) &= 0, \\ D_\mu G_a^{\mu\nu}(x) \equiv \partial_\mu G_a^{\mu\nu}(x) + g \sum f_{abc} B_{b\mu}(x) G_c^{\mu\nu}(x) &= 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

§ 4. Каноническое квантование, фиксация калибровки, ковариантные калибровки

Попытаемся проквантовать *свободные* глюонные поля. Лагранжиан (янг-миллсовский) для свободного глюонного поля имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}}_{YM}^0 &= -\frac{1}{4} \sum G_a^{0\mu\nu} G_{\mu\nu}^{0a}, \\ G_a^{0\mu\nu} &= \partial^\mu B_a^{0\nu} - \partial^\nu B_a^{0\mu}; \end{aligned} \quad (4.1)$$

¹⁾ Специфические калибровки с духами можно построить и для абелевых теорий.

здесь индекс 0 обозначает свободные поля. Выражение (4.1) аналогично лагранжиану, описывающему восемь не взаимодействующих электромагнитных полей. Оно инвариантно относительно *свободных* калибровочных преобразований:

$$B_a^{0\mu} \rightarrow B_a^{0\mu} - \partial^\mu \theta_a. \quad (4.2)$$

Рассмотрим проблемы и преимущества, связанные с калибровочной инвариантностью. В силу того что поля B определены неоднозначно, невозможно непосредственно проквантовать лагранжиан (4.1). В самом деле, предположим, что для этого применяется стандартная процедура канонического квантования. Определим импульсы, канонически сопряженные полям B_a^0 . Опуская индексы 0, обозначающие свободные поля, для импульсов π получаем выражения

$$\pi_a^\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}_{YM}}{\partial(\partial_0 B_{a\mu})} = G_a^{\mu 0}, \quad (4.3)$$

из которых видно, что нулевые компоненты импульсов $\pi_a^0(x)$ тождественно равны нулю. *Канонические коммутационные соотношения* записываются в виде

$$[\pi_a^\mu(x), B_b^\nu(y)] \delta(x^0 - y^0) = -i \delta_{ab} g^{\mu\nu} \delta(x - y). \quad (4.4)$$

Нулевые компоненты полей $B_a^0(x)$ коммутируют со всеми операторами и, таким образом, являются c -числами.

В этом случае имеются две возможности. Первая состоит в выборе такой калибровки, в которой отсутствовали бы нефизические степени свободы. Но при этом явно нарушается лоренц-инвариантность. Вторая возможность заключается в том, чтобы все компоненты полей B^μ рассматривать единообразно. Поскольку при этом сохраняются нефизические степени свободы, возникает необходимость введения пространства с индефинитной метрикой. Отложим обсуждение физических калибровок до следующего параграфа и рассмотрим ковариантные калибровки.

Как известно из электродинамики (на данном уровне изложения различий между КХД и КЭД нет), нельзя наложить лоренцеву калибровку вида $\partial_\mu B_a^\mu = 0$ и сохранить при этом ковариантные коммутационные соотношения. Поэтому приходится отказаться от рассмотрения соотношения $\partial B = 0$ как операторного уравнения. Введем *пространство Гупты – Блейлера* \mathcal{H}_{GB} , в котором соотношение (4.4) принимается в приведенном выше виде. Покажем, что это приводит к возникновению в пространстве \mathcal{H}_{GB} индефинитной метрики. Назовем физическими векторы, удовлетворяющие условию

$$\langle \Phi_{ph} | \partial_\mu B_a^\mu(x) | \Phi_{ph} \rangle = 0. \quad (4.5)$$

Если теперь приравнять друг другу векторы, различающиеся на вектор с нулевой нормой, т. е. принять

$$|\Phi_{ph}\rangle \sim |\Phi'_{ph}\rangle = |\Phi_{ph}\rangle + |\Phi^{(0)}\rangle, \quad (4.6)$$

где $\langle \Phi^{(0)} | \Phi^{(0)} \rangle = 0$, то мы получим пространство физических векторов \mathcal{L} .

Чтобы сохранить соотношение (4.4), необходимо модифицировать лагранжиан (4.1), добавив к нему член $-(\lambda/2) \sum_a (\partial_\mu B_a^\mu)^2$ (фиксирующий калибровку). Теперь выражение для лагранжиана принимает вид

$$\mathcal{L}_{\text{ЛЮМ}} = -\frac{1}{4} \sum_a G_a^{\mu\nu} G_{a\mu\nu} - \frac{\lambda}{2} \sum_a (\partial_\mu B_a^\mu)^2. \quad (4.7)$$

Такая модификация не приведет к физическим следствиям, по крайней мере в случае свободных полей, так как матричные элементы добавленного члена по физическим векторам в силу условия (4.5) обращаются в нуль.

Импульсы, канонически-сопряженные полям B , теперь имеют вид

$$\pi_{\lambda a}^\mu(x) = G_a^{\mu 0}(x) - \lambda g^{\mu 0} \partial_\nu B_a^\nu(x), \quad (4.8)$$

и ни одна из их компонент не обращается в нуль. Следовательно, можно сохранить соотношение (4.4) без изменений. Но при этом возникает индефинитная метрика. Рассмотрим, например, соотношение (4.4) при $\mu = 0$:

$$\lambda [\partial_\mu B_a^\mu(x), B_b^\nu(y)] \delta(x_0 - y_0) = i \delta_{ab} \delta_{0\nu} \delta_4(x - y). \quad (4.9)$$

Это соотношение оказывается знаконеопределенным. Чтобы убедиться в этом, перейдем в импульсное пространство. Положим калибровочный параметр $\lambda = 1$ и введем канонические тетрады $\epsilon^{(\rho)}(k)$, связанные с некоторым светоподобным вектором k :

$$\begin{aligned} \epsilon_\mu^{(0)} &= \delta_{\mu 0}; \\ \epsilon_0^{(i)} &= 0, \quad \vec{\epsilon}^{(i)} \cdot \vec{k} = 0, \quad i = 1, 2, \quad \epsilon_\mu^{(3)} = \frac{1}{k^0} k_\mu - \delta_{\mu 0}; \\ \epsilon_\mu^{(i)} \epsilon^{(j)\mu} &= -\delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Компоненты $\epsilon^{(i)}$ ($i = 1, 2$) соответствуют физическим частицам с нулевой массой, $\epsilon^{(3)}$ представляет собой продольную компоненту, а компонента $\epsilon^{(0)}$ соответствует объекту со спином нуль. Поля B можно разложить по операторам рождения и уничтожения. Такое разложение имеет вид

$$\begin{aligned} B_b^\mu(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\vec{k}}{2k^0} \sum_\rho \{ e^{-ik \cdot x} \epsilon^{(\rho)\mu}(k) a_\rho(b, k) \\ &+ e^{ik \cdot x} \epsilon^{(\rho)\mu}(k) a_\rho^+(b, k) \}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Используя соотношения (4.4), получаем следующие коммутационные соотношения для операторов a и a^+ :

$$[a_\mu(b, k), a_\nu^+(b', k')] = -g_{\mu\nu} \delta_{bb'} 2k^0 \delta(\vec{k} - \vec{k}'), \quad (4.12)$$

из которых видно, что вакуумное среднее $\langle 0 | a_0(k) a_0^+(k) | 0 \rangle$ в рассматриваемой нами калибровке отрицательно.

Исходя из соотношений (4.12), можно вычислить пропагатор калибровочного поля B . Введя обозначение

$$\langle TB_a^\mu(x) B_b^\nu(0) \rangle_0 = D_{ab}^{\mu\nu}(x),$$

глюонный пропагатор при произвольном значении параметра λ можно записать в виде

$$D_{ab}^{\mu\nu}(x) = \delta_{ab} \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{-ik \cdot x} \frac{-g^{\mu\nu} + (1 - \lambda^{-1}) k^\mu k^\nu / (k^2 + i0)}{k^2 + i0}. \quad (4.13 \text{ а})$$

Для вакуумного матричного элемента использовано сокращенное обозначение

$$\langle fg \dots h \rangle_0 \equiv \langle 0 | fg \dots h | 0 \rangle,$$

которое будет неоднократно встречаться и в дальнейшем. Выражение для пропагатора D можно упростить, введя обозначение $1 - 1/\lambda = \xi$. В импульсном пространстве выражение для пропагатора глюонного поля имеет вид

$$D_{ab}^{\mu\nu}(k) = i\delta_{ab} \frac{-g^{\mu\nu} + \xi k^\mu k^\nu / (k^2 + i0)}{k^2 + i0}. \quad (4.13 \text{ б})$$

Особенно простой является калибровка Ферми — Фейнмана, которая соответствует значению параметра $\xi = 0$. Иногда оказывается удобной *поперечная калибровка*, или *калибровка Ландау*, отвечающая значению $\xi = 1$.

В действительности для случая $\lambda \neq 1$ выражение (4.13) должно быть получено несколько иным способом, так как для физических безмассовых глюонов член $k^\mu k^\nu / k^2$ обращается в бесконечность. Эту трудность можно обойти, приписывая глюонам некоторую фиктивную массу M . Тогда в импульсном пространстве пропагатор описывается выражением

$$D_{ab}^{\mu\nu}(k, M) = \frac{-g^{\mu\nu} + (1 - \lambda^{-1}) k^\mu k^\nu / (k^2 - \lambda^{-1} M^2 + i0)}{k^2 - M^2 + i0} i\delta_{ab},$$

из которого в пределе $M \rightarrow 0$ следует выражение (4.13).

В квантовой электродинамике фотоны не испытывают самодействия, поэтому в рамках этой теории использование ковариантных калибровок не

сопряжено с дополнительными трудностями и проводится на описанном выше уровне. Но в случае квантовой хромодинамики самодействие глюонов приводит к дальнейшим усложнениям. Этому вопросу посвящен следующий параграф.

§ 5. Унитарность, лоренцевы калибровки, духи, физические калибровки

1. Ковариантные калибровки

Следует помнить, что присутствие в пространстве состояний, в котором определены поля, нефизических векторов может привести к нарушению соотношения унитарности. Условие (2.7) или (2.8), выражающее унитарность S -матрицы, справедливо только в пространстве физических состояний. Определяя проекторы на физические состояния P соотношениями

$$P\mathfrak{S}_{\text{GB}} = \mathfrak{L}, \quad P^2 = P^+ = P, \quad (5.1)$$

условия унитарности (2.7) или (2.8) можно записать во всем пространстве в виде

$$(PSP)(PSP)^+ = P. \quad (5.2)$$

Если лагранжиан эрмитов, то S -матрица унитарна в пространстве \mathfrak{X}_{GB} , поэтому условие (5.2) будет выполнено только в том случае, когда S -матрица коммутирует с оператором P . В описанных в предыдущем параграфе калибровках это соотношение справедливо для квантовой электродинамики и не справедливо для КХД, так как, за исключением случая $g = 0$, калибровочные преобразования в КХД приводят к самодействию глюонов. Это означает, что лагранжиан

$$\mathcal{L}^\xi = \sum_q \{ i\bar{q}\not{D}q - m_q\bar{q}q \} - \frac{1}{4}(D \times B)^2 - \frac{\lambda}{2}(\partial B)^2, \quad \xi = 1 - 1/\lambda, \quad (5.3)$$

полученный добавлением к выражению (3.5) члена, фиксирующего калибровку, не полон, и его следует изменить.

Для того чтобы понять, какие члены необходимо еще ввести в лагранжиан (5.3), проследим, как нарушается соотношение (5.2) в частном случае калибровки Ферми – Фейнмана. Рассмотрим процесс рассеяния кварка и антикварка во втором порядке теории возмущений.

Фейнмановские диаграммы, дающие вклад в этот процесс, приведены на рис. 1. Вычисление диаграмм рис. 1, б и в несложно; трудности возникают лишь при обработке диаграммы рис. 1, а. Вычислим диаграмму рис. 1, а в пространстве размерности D (см. § 7), а затем перейдем к физическому пределу $D \rightarrow 4$. Соответствующая амплитуда (см. направления импульсов

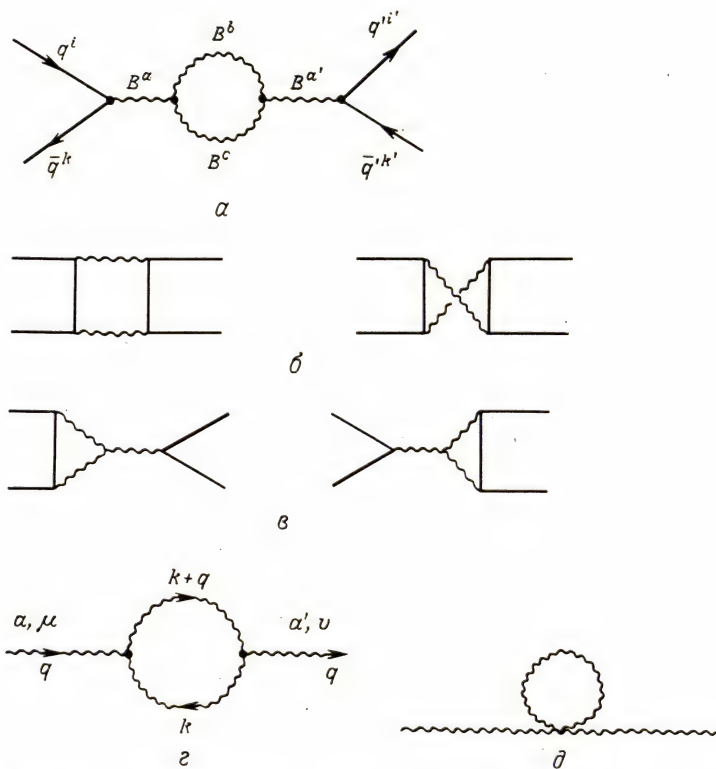


Рис. 1. Диаграммы qq -рассеяния (а – в), глюонная петля (г) и глюонный "головастик" (д).

на рис. 1, а) имеет вид ¹⁾

$$\mathcal{T}_4 = \frac{-g^2}{(2\pi)^2} \sum \bar{v}_k \gamma_\mu u_i t_{ir}^a \frac{-ig^{\mu\mu'}}{q^2} \Pi_{aa'\mu\nu} \frac{-ig^{\nu\nu'}}{q^2} \bar{u}'_{k'} \gamma_\nu v'_i t'_{ir}^{a'} \delta(P_i - P_f), \quad (5.4 \text{ а})$$

где

$$\begin{aligned} \Pi_{aa'}^{\mu\nu}(q) &= \frac{-ig^2}{2} \sum f^{abc} f^{a'bc} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \cdot \frac{1}{k^2(k+q)^2} \\ &\times \left\{ \left[-(2k+q)^\mu g_{\alpha\beta} + (k-q)_\beta g_\alpha^\mu + (2q+k)_\alpha g_\beta^\mu \right] \right. \\ &\times \left. \left[-(2k+q)^\nu g^{\alpha\beta} + (k-q)^\beta g^{\nu\alpha} + (2q+k)^\alpha g^{\nu\beta} \right] \right\}. \quad (5.4 \text{ б}) \end{aligned}$$

¹⁾ Диаграмма рис. 1, д, часто называемая глюонным "головастиком", не дает вклада в амплитуду рассеяния, так как в размерной регуляризации $\int d^D k (k^2 + i0)^{-1} \equiv 0$ (см. § 7).

Используя соотношение $\Sigma ff = \delta^{aa'} C_A$ (см. приложение В) и произведя стандартные выкладки, получаем для тензора $\Pi_{aa'}^{\mu\nu}$ следующее выражение:

$$\begin{aligned} \Pi_{aa'}^{\mu\nu} = & \delta_{aa'} C_A \frac{g^2}{32\pi^2} \\ & \times \left\{ \left[\frac{19}{6} N_\epsilon - \frac{1}{2} - \int_0^1 dx (11x^2 - 11x + 5) \log(-x(1-x)q^2) \right] q^2 g^{\mu\nu} \right. \\ & \left. - \left[\frac{11}{3} N_\epsilon + \frac{2}{3} - \int_0^1 dx (-10x^2 + 10x + 2) \right. \right. \\ & \left. \left. \times \log(-x(1-x)q^2) \right] q^\mu q^\nu \right\}; \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$N_\epsilon \equiv \frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \log 4\pi, \quad \epsilon = 4 - D \rightarrow 0.$$

Оно расходится в пределе $\epsilon \rightarrow 0$, но нас сейчас беспокоит не эта расходимость.

Соотношение унитарности требует выполнения равенства $\text{Im } \mathcal{T} = (1/2) \mathcal{T} \mathcal{T}^+$.

Но $\text{Im } \mathcal{T}$ получается из выражения (5.4) заменой тензора Π на его мнимую часть $\text{Im } \Pi$, которая, согласно (5.5), имеет вид

$$\text{Im } \Pi_{aa'}^{\mu\nu}(q) = \delta_{aa'} C_A \frac{g^2}{32\pi^2} \theta(q^2) \left\{ -\frac{19}{6} q^2 g^{\mu\nu} + \frac{22}{6} q^\mu q^\nu \right\}, \quad (5.6)$$

и конечна даже при $D = 4$. Она должна быть равна величине $(1/2) \Sigma_c, \text{ физ } \mathcal{T} | c$, физ $\gg c$, физ $|\mathcal{T}^+$, т.е. квадрату амплитуды процесса $q\bar{q} \rightarrow B\bar{B}$ с физическими глюонами $B\bar{B}$ (рис. 2). Используя правила Фейнмана, легко видеть, что выражение для такой амплитуды аналогично выражению для $\text{Im } \mathcal{T}$ с заменой мнимой части поляризационного оператора $\text{Im } \Pi_{\mu\nu}^{aa}(q)$ на комбинацию

$$\delta_{aa'} C_A \sum_{\substack{\eta_1, \eta_2 \\ k_1 + k_2 = q}} \mathcal{A}_\mu(k_1, k_2; \eta_1, \eta_2) \mathcal{A}_\nu^*(k_1, k_2; \eta_1, \eta_2), \quad (5.7 \text{ а})$$

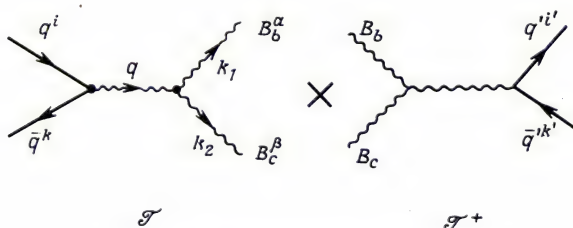


Рис. 2. Мнимая часть величины \mathcal{T} .

где параметр $\eta = \pm 1$ обозначает физические значения спиральностей глюонов, а функции \bar{G}_μ имеют вид

$$\mathcal{A}^\mu = [(k_1 + q)_\beta g_\alpha^\mu - (q + k_2)_\alpha g_\beta^\mu + (k_2 - k_1)^\mu g_{\alpha\beta}] \epsilon_p^\alpha(k_1, \eta_1) \epsilon_p^\beta(k_2, \eta_2). \quad (5.76)$$

Здесь ϵ_p — вектор поляризации испущенного физического глюона, заданный выражением

$$\epsilon_p^\alpha(k, \eta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \epsilon^{(1)\alpha}(k) + i\eta \epsilon^{(2)\alpha}(k) \},$$

содержащим тетрады $\epsilon^{(i)}$, определяемые аналогично выражениям (4.10).

Для физического глюона выполняется условие поперечности $k_\alpha \epsilon_p^\alpha(k, \eta) = 0$, $k^2 = 0$, поэтому выражение (5.76) можно записать в виде (напомним, что $q = k_1 + k_2$)

$$\mathcal{A}^\mu = [2k_{1\beta} g_\alpha^\mu - 2k_{2\alpha} g_\beta^\mu + (k_2 - k_1)^\mu g_{\alpha\beta}] \epsilon_p^\alpha(k_1, \eta_1) \epsilon_p^\beta(k_2, \eta_2).$$

Легко убедиться в справедливости равенства $q_\mu \mathcal{A}^\mu = 0$. Очевидно, что условию унитарности в пространстве состояний физических глюонов удовлетворить нельзя. В самом деле, из формулы (5.6) следует

$$q_\mu \Pi_{aa}^{\mu\nu}(q) \neq 0.$$

Конечно, противоречие возникло из-за того, что лагранжиан $\mathcal{L}_{\text{int}}^\xi$ переводит физические состояния в нефизические. На это впервые обратили внимание Де Витт [94] и Фейнман; решение проблемы для некоторых частных случаев было предложено Фейнманом [118], а для общего случая — Фаддеевым и Поповым [113]. Идея заключается в следующем. Нужно ввести дополнительные нефизические частицы ($\partial_\mu \bar{\omega}$), обращающие в нуль нефизические состояния, порождаемые лагранжианом $\mathcal{L}_{\text{int}}^\xi$. Таким образом, мы модифицируем лагранжиан \mathcal{L}^ξ , добавляя в него члены, отвечающие духам, в результате чего полный лагранжиан $\mathcal{L}_{\text{all}}^\xi$ принимает вид

$$\mathcal{L}_{\text{all}}^\xi = \mathcal{L}^\xi + \sum (\partial_\mu \bar{\omega}_a(x)) (\delta_{ab} \partial^\mu - g f_{abc} B_c^\mu(x)) \omega_b(x), \quad (5.8)$$

где лагранжиан \mathcal{L}^ξ определен формулой (5.3). Поля ω и $\bar{\omega}$, обладая нулевым спином, подчиняются статистике Ферми — Дирака¹⁾. Эти поля не появляются в начальных или конечных состояниях (по предположению они нефизические), поэтому несоответствие их спина и статистики не должно вызывать беспокойства.

¹⁾ Иногда удобно, хотя и не обязательно, считать поля $\bar{\omega}$ и ω взаимно сопряженными. Более подробно вопрос о духах обсуждается в § 41, 42.

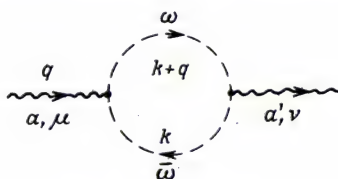


Рис. 3. Петля духов.

Продолжим рассмотрение свойства унитарности S -матрицы, введя в лагранжиан член, описывающий вклад духов. Так как духи взаимодействуют лишь с глюонами, они изменяют только диаграмму рис. 1, a , которая приводила к нарушению унитарности. Выражение для тензора Π приобретает возникающую за счет духов добавку, для которой после простых вычислений (рис. 3) получаем следующий результат:

$$\begin{aligned} \Pi_{(\text{Ghost})aa'}^{\mu\nu} &= \delta_{aa'} C_A i g^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \cdot \frac{k^\mu (k+q)^\nu}{k^2 (k+q)^2} \\ &= \frac{\delta_{aa'} g^2}{32\pi^2} C_A \left\{ \left[\frac{1}{6} N_\epsilon + \frac{1}{6} - \int_0^1 dx \cdot x(1-x) \log(-x(1-x)q^2) \right] q^2 g^{\mu\nu} \right. \\ &\quad \left. - \left[-\frac{1}{3} N_\epsilon + 2 \int_0^1 dx \cdot x(1-x) \log(-x(1-x)q^2) \right] q^\mu q^\nu \right\}. \end{aligned}$$

Суммируя вклады глюонов и духов и используя формулы интегрирования, приведенные в приложении Б, находим для поляризационного оператора Π окончательное выражение

$$\Pi_{(\text{all})aa'}^{\mu\nu} = \delta_{aa'} \frac{g^2 C_A}{32\pi^2} (-g^{\mu\nu} q^2 + q^\mu q^\nu) \left\{ -\frac{10}{3} N_\epsilon - \frac{62}{9} + \frac{10}{3} \log(q^2) \right\}, \quad (5.9)$$

которое, очевидно, удовлетворяет условию поперечности

$$q_\mu \Pi_{(\text{all})aa'}^{\mu\nu} = q_\nu \Pi_{(\text{all})aa'}^{\mu\nu} = 0. \quad (5.10)$$

Проверку унитарности мы оставляем читателю в качестве простого упражнения. Далее в тексте индекс all мы опускаем и рассматриваем лагранжиан КХД, записанный в ковариантной (лоренцевой) калибровке, т.е.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{QCD}}^\xi &= \sum_q \{ i \bar{q} \not{D} q - m_q \bar{q} q \} - \frac{1}{4} (D \times B)^2 - \frac{\lambda}{2} (\partial B)^2 \\ &+ \sum (\partial_\mu \bar{\omega}_a) (\delta_{ab} \partial^\mu - g f_{abc} B_c^\mu) \omega_b, \quad \xi = 1 - 1/\lambda. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Начиная со следующего раздела, в обозначении лагранжиана \mathcal{L} индекс КХД мы также будем опускать.

2. Физические калибровки

Появление *духов* вызвано тем, что оператор проекции на физические состояния P не коммутирует с лагранжианом КХД, записанным в лоренцевой калибровке. Может оказаться, что такой проблемы не возникнет, если выбрать калибровку, в которой все глюонные состояния соответствуют физическим, так что все гильбертово пространство полей является физическим. Известно, что уже на уровне квантовой электродинамики невозможно одновременно удовлетворить условиям положительной энергии, локальности и явной лоренц-инвариантности. Поэтому возникает необходимость использования нековариантной калибровки. Одной из нековариантных калибровок является кулоновская калибровка¹⁾, однако она тоже не свободна от *духов*. Необходимость введения *духов* исчезает, если потребовать выполнения соотношений

$$n \cdot B = 0, \quad n^2 \leq 0. \quad (5.12)$$

Случай пространственноподобного вектора n ($n^2 < 0$) соответствует *аксиальным калибровкам*²⁾, а случай светоподобного вектора n ($n^2 = 0$) — *светоподобной калибровке*³⁾. Так как вектор n является по отношению к задаче внешним, его введение нарушает явную лоренц-инвариантность промежуточных вычислений, хотя, конечно, калибровочная инвариантность обеспечивает независимость окончательных результатов для *физических* величин от вектора n , а следовательно, и их лоренц-инвариантность.

Начнем с рассмотрения аксиальной калибровки. Лагранжиан, записанный в аксиальной калибровке, имеет вид

$$\mathcal{L}_n = \sum_q \{ i \bar{q} \not{D} q - m_q \bar{q} q \} - \frac{1}{4} (D \times B)^2 - \frac{1}{2\beta} (n \cdot B)^2. \quad (5.13)$$

В дальнейшем по параметру β подразумевается предельный переход $\beta \rightarrow 0$, так что условие (5.12) представляет собой операторное соотношение, выполненное на всем гильбертовом пространстве. Пропагатор, соответствующий лагранжиану (5.13), записывается в виде

$$i \frac{-g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu (n^2 + \beta k^2) / (k \cdot n)^2 + (n^\mu k^\nu + n^\nu k^\mu) (n \cdot k)^{-1}}{k^2 + i0}; \quad (5.14)$$

¹⁾ Более того, кулоновская калибровка вносит дополнительные осложнения. Формулировка КХД в кулоновской калибровке изложена в статье [69].

²⁾ Аксиальные калибровки обсуждаются в работе [185]. См. также цитируемую там литературу.

³⁾ См., например, работу [247] и цитируемую там литературу.

в пределе $\beta \rightarrow 0$ он принимает вид

$$i \frac{-g^{\mu\nu} - n^2(k^\mu k^\nu / (k \cdot n)^2) + (n^\mu k^\nu + n^\nu k^\mu) / (k \cdot n)}{k^2 + i0}. \quad (5.15)$$

Обобщение теории на аксиальные калибровки нетривиально; детальное изложение этой процедуры заинтересованный читатель найдет в работе [185]. Все вычисления в аксиальных калибровках мы будем проводить только на однопетлевом уровне, на котором трудностей не возникает.

При рассмотрении светоподобных калибровок удобно ввести так называемые "нулевые" координаты, определяемые для любого вектора v в виде

$$v^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(v^0 \pm v^3), \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}; \quad v^\alpha = v^\pm \quad \text{или} \quad v^i \quad (i = 1, 2).$$

Метрика определяется следующим образом:

$$g_{+-} = g_{-+} = 1, \quad g_{++} = g_{--} = 0, \quad g_{ij} = -\delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2.$$

Отметим, что выполняются соотношения

$$v \cdot w = v_+ w_- + v_- w_+ - \underline{v} \underline{w} = v_\alpha w^\alpha.$$

Для светоподобного вектора u "нулевые" координаты можно выбрать в виде $u = 0, u_- = 0, u_+ = 1$. Тогда дополнительное условие $u \cdot B = 0$ можно записать в виде

$$B_-^\alpha(x) = 0. \quad (5.16)$$

Пропагатор в светоподобной калибровке определяется соотношением

$$i \frac{P^{\mu\nu}(k, u)}{k^2 + i0} = i \frac{-g^{\mu\nu} + (u^\mu k^\nu + u^\nu k^\mu) / (u \cdot k)}{k^2 + i0}, \quad (5.17)$$

которое представляет собой частный случай формулы (5.15) с вектором $n = u, u^2 = 0$. В нулевых координатах выражение (5.17) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{P^{\alpha\beta}}{k^2} = \frac{-g^{\alpha\beta} + (\delta_-^\alpha k^\beta + \delta_-^\beta k^\alpha) / k_-}{k_\alpha k^\alpha + i0}.$$

В качестве примера использования светоподобной калибровки рассмотрим глюонный пропагатор во втором порядке теории возмущений. В названной калибровке он имеет вид

$$\begin{aligned} \Pi_{lab}^{\mu\nu} = & \frac{-ig^2 C_A \delta_{ab}}{2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \cdot \frac{1}{k^2(k+q)^2} \\ & \times \left[-(2k+q)^\mu g^{\alpha\beta} + (k-q)^\beta g^{\mu\alpha} + (2q+k)^\alpha g^{\mu\beta} \right] P_{\alpha\rho}(k, u) \\ & \times \left[-(2k+q)^\nu g^{\rho\sigma} + (k-q)^\sigma g^{\nu\rho} + (2q+k)^\rho g^{\nu\sigma} \right] P_{\sigma\beta}(k+q, u). \end{aligned}$$

Будем рассматривать только расходящуюся и логарифмическую части. Это значительно упрощает вычисления, в результате которых получаем

$$\Pi_{ab}^{\mu\nu}(q) = \frac{11 C_A g^2 \delta_{ab}}{3 \times 16 \pi^2} (-q^2 g^{\mu\nu} + q^\mu q^\nu) \{ N_\epsilon - \log(-q^2) + \text{постоянные члены} \}. \quad (5.18)$$

Видно, что это выражение поперечно. При этом нет необходимости вводить духи. Интересно отметить, что пропагатор при условии (5.18) удовлетворяет трансцендентному уравнению

$$\frac{P^{\mu\alpha}(q, u)}{q^2} \{ -q^2 g_{\alpha\beta} + q_\alpha q_\beta \} \frac{P^{\beta\nu}(q, u)}{q^2} = \frac{P^{\mu\nu}(q, u)}{q^2}. \quad (5.19)$$

§ 6. Преобразования Бекши – Роуета – Стора

В предыдущем параграфе было показано, что если в лагранжиане КХД, записанном в лоренцевой калибровке, не учесть вклада духов, то это приводит к нарушению унитарности S -матрицы в пространстве физических состояний. Но в силу калибровочной инвариантности теории свойство унитарности S -матрицы должно выполняться в любой калибровке. Очевидно, что данное нарушение связано с введением фиксирующего калибровку члена, который не обладает свойством калибровочной инвариантности. В таком случае можно задать вопрос: нельзя ли интерпретировать введение духов как способ восстановить нарушенную калибровочную инвариантность лагранжиана? Доказательство справедливости данного утверждения составляет содержание настоящего параграфа.

Начнем с рассмотрения квантовой электродинамики¹⁾. Лагранжиан, записанный в ковариантной калибровке, имеет вид

$$\mathcal{L}^{\text{е}} = \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2, \quad (6.1)$$

где тензор $F_{\mu\nu}$ и ковариантная производная D_μ определяются формулами

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad D^\mu = \partial^\mu + ieA^\mu.$$

Калибровочная инвариантность лагранжиана нарушается членом $-(\lambda/2)(\partial A)^2$. Однако ее можно восстановить следующим способом. Добавим в лагранжиан (6.1) член вида

$$\mathcal{L}_\omega = -\frac{1}{2} (\partial_\mu \omega) \partial^\mu \omega, \quad (6.2)$$

¹⁾ В изложении мы следуем работам [221, 222].

соответствующий свободному безмассовому полю ω . Обобщим калибровочные преобразования таким образом, чтобы включить поля ω . Если определить параметры инфинитезимальных преобразований в виде $\theta(x) = \epsilon\omega(x)$, то поля, входящие в лагранжиан, преобразуются по формулам

$$\begin{aligned}\psi(x) &\rightarrow \psi(x) + ie\epsilon\omega(x)\psi(x), & A^\mu(x) &\rightarrow A^\mu(x) - \epsilon\partial^\mu\omega(x), \\ \omega(x) &\rightarrow \omega(x) - \epsilon\lambda\partial_\mu A^\mu(x).\end{aligned}\quad (6.3)$$

Тогда с точностью до 4-дивергенции лагранжиан электродинамики, представляющий собой сумму лагранжианов \mathcal{L}^ξ и \mathcal{L}_ω :

$$\mathcal{L}^\xi_{\text{ED}} = \mathcal{L}^\xi + \mathcal{L}_\omega \quad (6.4)$$

инвариантен при преобразованиях (6.3). Метод восстановления калибровочной инвариантности для рассматриваемого случая довольно прост. Благодаря тому что поля A не заряжены и не взаимодействуют между собой, поля ω можно выбрать в виде свободных действительных полей. Однако простота лагранжиана \mathcal{L}_ω не означает отсутствия глубоких физических следствий его введения. В самом деле, можно показать, что преобразования (6.3) порождают все тождества Уорда квантовой электродинамики, которые, в частности, обуславливают тот факт, что электромагнитное взаимодействие не переводит физические состояния в нефизические. Например, будет показано, как из соотношений (6.3) и (6.4) можно получить условие поперечности фотонного пропагатора. (Конечно, его можно проверить и путем прямого вычисления вакуумной поляризации.)

Рассмотрим величину $\langle TA_\mu(x)\omega(0) \rangle_0$. Проведя обобщенное калибровочное преобразование, в первом порядке по параметру ϵ получаем

$$\lambda \langle TA_\mu(x)(\partial_\nu A^\nu(0)) \rangle_0 = \langle T(\partial^\mu\omega(x))\omega(0) \rangle_0.$$

Фурье-образ этого выражения имеет вид

$$\begin{aligned}&\int d^4x e^{iq \cdot x} \langle TA^\mu(x)\partial_\nu A^\nu(0) \rangle_0 \\&= iq_\nu \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle TA^\mu(x)A^\nu(0) \rangle_0 = iq_\nu D^{\mu\nu}(q) \\&= \frac{-1}{\alpha} \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle T(\partial^\mu\omega(x))\omega(0) \rangle_0 \\&= \frac{i}{\lambda} q^\mu \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle T\omega(x)\omega(0) \rangle_0 \\&= \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{q^\mu}{q^2 + i0}.\end{aligned}\quad (6.5)$$

Последнее равенство справедливо в силу того, что поля ω свободные, и, следовательно, их пропагатор имеет вид пропагатора свободных полей. Таким образом, доказано, что если пропагатор $D^{\mu\nu}$ записать в виде суммы поперечной и продольной составляющих

$$D^{\mu\nu}(q) = (-q^2 g^{\mu\nu} + q^\mu q^\nu) D_\perp(q^2) + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} D_L(q^2), \quad (6.6)$$

то последняя имеет вид

$$D_L(q^2) = \frac{-1}{\lambda} \cdot \frac{i}{q^2 + i0}, \quad (6.7)$$

аналогичный продольной части пропагатора свободных полей. Напомним, что пропагатор свободных полей выражается в виде

$$D^{0\mu\nu}(q) = i \frac{-g^{\mu\nu} + (1 - \lambda^{-1}) q^\mu q^\nu / (q^2 + i0)}{q^2 + i0}.$$

Другими словами, если пропагатор D разложить в ряд по степеням константы взаимодействия

$$D^{\mu\nu}(q) = D^{(0)\mu\nu}(q) + \frac{e^2}{4\pi} D^{(2)\mu\nu}(q) + \dots,$$

то все величины $D^{(n)\mu\nu}(q)$ удовлетворяют условию поперечности:

$$q_\mu D^{(n)\mu\nu}(q) = 0, \quad n = 2, 4, \dots,$$

которое эквивалентно соотношению (5.10).

Обобщением калибровочных преобразований (6.3) на случай неабелевой теории являются так называемые преобразования Бекши — Роуэта — Стора (БРС) [32, 33]. При этом поля духов, как и все другие поля, подвергаются калибровочным преобразованиям, в результате чего (с точностью до 4-дивергенции) полный лагранжиан квантовой хромодинамики (5.11) становится калибровочно-инвариантным. Такие преобразования приводят к *тождествам Славнова* [232] — *Тейлора* [244], представляющим собой аналог тождеств Уорда в квантовой электродинамике. Предполагается, что параметр инфинитезимальных преобразований БРС ϵ представляет собой не зависящую от пространственно-временной точки x с-числовую величину, антикоммутирующую (коммутирующую) с фермионными (бозонными) полями¹⁾. Инфинитези-

¹⁾ При этом $\epsilon^2 = 0$, $\epsilon\omega = -\omega\epsilon$, $\epsilon q = -q\epsilon$, $\epsilon B = B\epsilon$ и т.д. Следует помнить, что поля ω являются фермионными и подчиняются статистике Ферми — Дирака, так что справедливо соотношение $\omega_b \omega_c = -\omega_c \omega_b$.

мальные преобразования БРС определяются в виде

$$\begin{aligned} B_a^\mu &\rightarrow B_a^\mu - \epsilon \sum \{ \delta_{ab} \partial^\mu - g f_{abc} B_c^\mu \} \omega_b, \\ q &\rightarrow q - i\epsilon g \sum t^a \omega_a q, \\ \omega_a &\rightarrow \omega_a - \frac{\epsilon}{2} g \sum f_{abc} \omega_b \omega_c, \\ \bar{\omega}_a &\rightarrow \bar{\omega}_a + \epsilon \lambda \partial_\mu B_a^\mu. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Используя эти преобразования точно так же, как это делается в случае, квантовой электродинамики, легко получить результат, аналогичный формуле (6.7). Если записать пропагатор в виде суммы продольной и поперечной частей

$$D_{ab}^{\mu\nu}(q) = \delta_{ab} (-g^{\mu\nu} q^2 + q^\mu q^\nu) D_{\text{tr}} + \delta_{ab} \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} D_L, \quad (6.9)$$

то для продольной части имеем

$$D_L = -\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{i}{q^2 + i0}. \quad (6.10)$$

Разложим пропагатор D в ряд по степеням константы взаимодействия g^2 :

$$D_{ab}^{\mu\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{g^2}{4\pi} \right)^n D_{ab}^{(n)\mu\nu}.$$

Примем во внимание соотношение

$$D_{ab}^{(2)\mu\nu} = \sum D_{a'a'}^{(0)\mu\mu'} \Pi_{a'b'\mu'\nu'}^{(2)} D_{b'b}^{(0)\nu'\nu}$$

(поляризационный оператор $\Pi^{(2)}$ взят во втором порядке теории возмущений). Из двух последних соотношений получаем следующий результат:

$$q_\mu \Pi_{ab}^{(2)\mu\nu} = 0.$$

Справедливость этого равенства как раз и проверялась в уравнениях (5.9) и (5.10).

Необходимо отметить, что все проведенные выше выкладки выполнены чисто формальным образом. Так, например, в процессе вычислений мы намеренно закрывали глаза на то, что пропагаторы представляют собой сингулярные функции. Чтобы корректно установить равенства между величинами, необходимо проверить, что к ним можно применять процедуру перенормировок (см. § 7 — 9). В самом деле, некоторые формальные равенства при этом нарушаются; пример такого нарушения приведен в § 33. Однако даже сохраняющиеся при процедуре перенормировок равенства иногда приходится

интерпретировать по-новому. Это относится, например, к уравнению (6.10), так как фигурирующий в нем калибровочный параметр заменяется на перенормированный, в результате чего смысл его несколько изменяется.

§ 7. Размерная регуляризация

Как мы видели в примере, приведенном в § 5, некоторые из амплитуд рассеяния оказываются расходящимися. Это происходит из-за сингулярного характера полевых операторов. Легко найти, что расходимость интеграла по dk в (5.46) при больших импульсах k обусловлена тем, что в координатном пространстве в него входят произведения полевых операторов, взятых в одной пространственно-временной точке. Поэтому, чтобы обсуждать квантовую хромодинамику (или любую другую локальную релятивистскую теорию поля), необходимо появляющимся при вычислении фейнмановских диаграмм интегралам придать математически строгий смысл. Эта процедура носит название *регуляризации* и сводится к замене лагранжиана \mathcal{L} регуляризованным лагранжианом \mathcal{L}_ϵ , приводящим при вычислении фейнмановских диаграмм к конечным ответам и в пределе $\epsilon \rightarrow 0$ переходящим в некотором смысле в исходный лагранжиан \mathcal{L} , т.е. $\mathcal{L}_\epsilon \rightarrow \mathcal{L}$. Из классических работ Бора и Розенфельда [46, 47] известно, что полевые операторы по своей природе сингулярны, и, следовательно, любая процедура регуляризации с неизбежностью нарушает некоторые физические особенности теории. Например, регуляризация Паули – Вилларса в случае неабелевой теории нарушает свойства эрмитовости и калибровочной инвариантности, решеточная регуляризация нарушает инвариантность по отношению к преобразованиям Пуанкаре и т.д. Конечно, в пределе $\epsilon \rightarrow 0$ эти свойства восстанавливаются (если мы были достаточно осторожны!). Свойства калибровочной и лоренц-инвариантности особенно важны в случае КХД, поэтому в дальнейшем мы будем использовать размерную регуляризацию, нарушающую лишь масштабную инвариантность. Этот метод, подробно развитый в работах т'Хофта и Велтмана [253] (см. также [48]), связан с так называемой аналитической регуляризацией [49, 233]. Он состоит в том, что все вычисления проводят в пространстве размерности $D = 4 - \epsilon$, в конечном же ответе переходят к физическому пределу при $\epsilon \rightarrow 0$. При этом расходимости проявляются в виде полюсов по $1/\epsilon$. Насколько известно автору, математически строгого определения объекта в пространстве произвольной размерности D не существует, кроме случая, когда она равна положительному целому числу. Но этому не следует придавать слишком большого значения; нам необходимы лишь интерполяционные формулы, обладающие свойством калибровочной и пуанкаре-инвариантности и пригодные для вычисления фейнмановских интегралов. Такие интерполяционные формулы можно получить поэтапно. Рассмотрим сначала сходящийся интеграл вида $(2\pi)^D \int d^D k f(k^2)$, где функция f , как прави-

ло, имеет вид $f(k^2) = (k^2)^r (k^2 - a^2)^{-m}$ с целочисленными значениями параметров r и m , а величины $d^D k$ и k^2 определяются выражениями $d^D k = dk^0 dk^1 \dots dk^{D-1}$, $k^2 = (k^0)^2 - (k^1)^2 - \dots - (k^{D-1})^2$. Так как функция f аналитична в плоскости комплексного переменного k^0 , контур интегрирования можно повернуть на 90° и перейти от контура $(-\infty, +\infty)$ к контуру $(-i\infty, +i\infty)$, т.е. совершить так называемый *виковский поворот*. Затем можно восстановить интегрирование по прямой $(-\infty, +\infty)$, определив новую переменную $k^0 \rightarrow k^D = i k^0$. Таким образом, получаем обычный евклидов интеграл в пространстве размерности D

$$i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk^1}{2\pi} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk^D}{2\pi} f(-k_E^2), \quad k_E^2 \equiv (k^1)^2 + \dots + (k^D)^2 \equiv |k_E|^2.$$

Если элемент объема в D -мерном пространстве обозначить через $d^D k_E = dk^1 \dots dk^D$, то, вводя полярные координаты, его можно записать в виде $d^D k_E = d|k_E| \cdot |k_E|^{D-1} d\Omega_D$. Используя формулу $\int d\Omega_D = 2\pi^{D/2}/\Gamma(D/2)$, получаем наконец

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} f = \frac{i}{(2\pi)^{D/2} \Gamma(D/2)} \int_0^\infty d|k_E| \cdot |k_E|^{D-1} f(-|k_E|^2).$$

Все приведенные выше выкладки справедливы только для целых положительных значений размерности D . Но последнюю формулу можно использовать для *определения* интеграла по пространству произвольной (даже комплексной) размерности D и произвольных значений параметров r и m .

Рассмотрим далее интеграл от полиномиального по компонентам импульса k^μ выражения, умноженного на функцию $f(k^2)$; этот интеграл можно свести к ранее изученному случаю, записывая его, например, в виде

$$\int d^D k f(k^2) k^\mu k^\nu = \frac{g^{\mu\nu}}{D} \int d^D k f(k^2) k^2.$$

Наконец, интеграл общего вида сводится к только что изученным интегралам разложением подынтегрального выражения в ряд по степеням аргумента k^μ . Таким способом можно вычислить интегралы, приведенные в приложении Б (а также многие другие), в пространстве произвольной размерности D . Например, нетрудно убедиться в справедливости результата

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k^2)^r}{(k^2 - a^2)^m} = i \frac{(-1)^{r-m}}{(4\pi)^{D/2}} \cdot \frac{\Gamma(r + D/2) \Gamma(m - r - D/2)}{\Gamma(D/2) \Gamma(m) (a^2)^{m-r-D/2}}.$$

Если левая часть этого равенства расходится, скажем в физическом случае $D = 4$, что и происходит при $m - r - D/2 \leq 0$, это отражается в появлении полюсов в правой части равенства, связанных с полюсами гамма-функции

$\Gamma(m-r-D/2)$. Очевидно, что этот метод содержит в себе некоторый произвол, а именно правую часть равенства можно умножить на любую функцию $\Phi(D)$ при условии, что она аналитична по D и удовлетворяет условию $\Phi(4) = 1$. Такая свобода в выборе функции $\Phi(D)$ оказывается весьма полезной (см. следующий параграф).

Посмотрим теперь, какие усложнения возникают в случае, когда взаимодействующие частицы обладают отличным от нуля спином. Внешние и внутренние линии фейнмановских диаграмм следует различать. Ниже будет показано, что после перенормировки функции Грина с отброшенными внешними линиями в рамках теории возмущений оказываются конечными в пределе $D \rightarrow 4$. Поскольку спинорные множители на внешних линиях (т.е. множители $u, \bar{u}, v, \bar{v}, \epsilon^\mu, \bar{\epsilon}^\mu$; см. приложение Г) конечны в пространстве размерности $D = 4$, их можно сразу записывать в пространстве физической размерности. Что же касается спинорных множителей на внутренних линиях, то нужно доопределить тензор $g^{\alpha\beta}$ в пространстве размерности D таким образом, чтобы, например, выполнялось соотношение $g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} = D$ и т.д. Аналогично необходимо рассматривать D матриц Дирака $\gamma^0, \gamma^1, \dots, \gamma^{D-1}$. Если действовать последовательно, то приходится допустить, что матрицы γ_μ представляют собой матрицы размерности $2^{D/2} \times 2^{D/2}$ (равной размерности соответствующей алгебры Клиффорда). Но это не обязательно. Калибровочная инвариантность вполне совместима со случаем, когда матрицы γ_μ имеют размерность 4×4 , так что $\text{Tr } \gamma^\mu \gamma^\nu = 4 g^{\mu\nu}$; именно эта ситуация рассматривается здесь. (Метод, связанный с размерной регуляризацией, называется размерной редукцией; дополнительную информацию о ней читатель может найти в работе [231].)

Таким образом, обобщение интегралов и алгебры матриц Дирака на случай произвольной размерности пространства D производится весьма просто. Сводка формул, встречающихся при практических вычислениях, приводится в приложениях А и Б. Несколько более сложным оказывается только введение матрицы γ_5 в D -мерном пространстве. Например, если матрицу γ_5 определить в виде $\gamma_5 = i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$, то очевидно, что это выражение не определено в пространстве размерности $D < 4$. Можно показать, что определение матрицы γ_5 в виде $\gamma_5 = i \gamma^0 \dots \gamma^{D-1}$ не совместимо с калибровочной инвариантностью (см. § 33, в частности текст между уравнениями (33.17) и (33.20)). Подходящим является, по-видимому, следующее определение:

$$\gamma_5 = \frac{i}{4!} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}^D \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma,$$

где тензор ϵ^D совпадает с обычным антисимметричным тензором только в случае $D = 4$. На тензор ϵ^D не накладывается каких-либо дальнейших ограничений, кроме требования выполнения для любой размерности D условий

$$\gamma_5^2 = 1, \quad \text{Tr } \gamma_5 \gamma^\alpha \gamma^\beta = 0.$$

(см. приложение А). Таким образом, процедура размерной регуляризации полностью определена. До тех пор, пока размерность пространства, в котором проводится вычисление фейнмановских графиков, не равна целому числу, все возникающие при вычислениях интегралы оказываются конечными. В таком подходе сохраняется калибровочная и пуанкаре-инвариантность теории, но нарушается масштабная инвариантность.

Самый простой способ проследить за нарушением масштабной инвариантности состоит в следующем. При размерной регуляризации фейнмановский интеграл типа (5.46) изменяется:

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \rightarrow \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D}.$$

При этом размерности полей и констант связи, входящих в подынтегральное выражение, отличаются от канонических. Но их можно сохранить каноническими, если воспользоваться следующим рецептом:

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \rightarrow \int d^D \hat{k} \equiv \int \frac{d^D k v_0^{4-D}}{(2\pi)^D}, \quad D = 4 - \epsilon, \quad (7.1 \text{ а})$$

где

$$\hat{k}^\mu = v_0^{4/D-1} k^\mu / 2\pi. \quad (7.1 \text{ б})$$

При этом вводится нарушающий масштабную инвариантность произвольный параметр v_0 , имеющий размерность массы.

В качестве первого примера применения этого метода вычислим пропагатор кварка в импульсном пространстве во втором порядке теории возмущений:

$$S_{\xi}^{ij}(p) = \int d^4 x e^{ip \cdot x} \langle T q^i(x) \bar{q}^j(0) \rangle_0. \quad (7.2)$$

Соответствующие диаграммы приведены на рис. 4. В произвольной калибровке в пространстве размерности $D = 4 - \epsilon$ для пропагатора S имеем выражение вида

$$S_{B\xi}^{ij}(p) = \delta^{ij} \frac{i}{\not{p} - m + i0} - \frac{1}{\not{p} - m + i0} g^2 \sum_{l,a} t_{il}^a t_{lj}^a \Sigma_{B\xi}^{(2)}(p) \frac{i}{\not{p} - m + i0} + \text{члены высших порядков}, \quad (7.3 \text{ а})$$

где введено обозначение

$$\Sigma_{B\xi}^{(2)}(p) = -i \int d^D \hat{k} \frac{\gamma_\mu (\not{p} + \not{k} + m) \gamma_\nu}{(p+k)^2 - m^2} \cdot \frac{-g^{\mu\nu} + \xi k^\mu k^\nu / k^2}{k^2}. \quad (7.3 \text{ б})$$

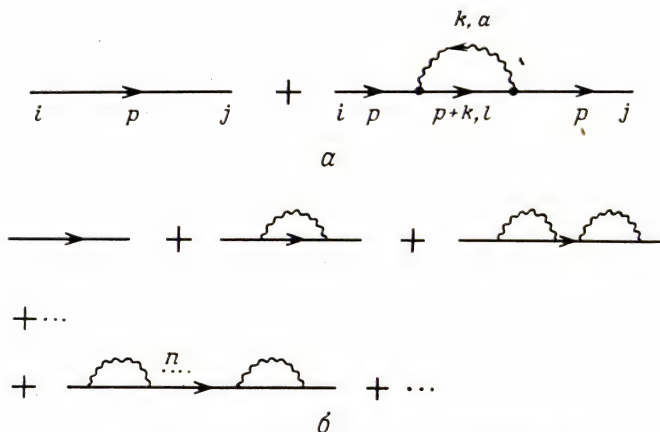


Рис. 4. Кварковый пропагатор (а) и итерация (б)

Используя тождество

$$\not{k}(\not{p} + \not{k} + m) = (p + k)^2 - m^2 - (p^2 - m^2) - (\not{p} - m) \cdot \not{k},$$

для массового оператора получаем выражение

$$\Sigma_{D\xi}^{(2)}(p) = -i \int d^D \hat{k} \left\{ \frac{(D-2)(\not{p} + \not{k}) - Dm - \xi(\not{p} - m)}{k^2[(p+k)^2 - m^2]} - \xi(p^2 - m^2) \frac{\not{k}}{k^4[(p+k)^2 - m^2]} \right\}.$$

После стандартных преобразований (пренебрегая членами, исчезающими в пределе $\epsilon \rightarrow 0$) приходим к окончательному ответу

$$\Sigma_{D\xi}^{(2)}(p) = (\not{p} - m)A_{D\xi}(p^2) + mB_{D\xi}(p^2); \quad (7.4 \text{ а})$$

$$A_{D\xi} = \frac{1}{16\pi^2} \left\{ (1-\xi)N_\epsilon - 1 - \int_0^1 dx [2(1-x) - \xi] \log \frac{xm^2 - x(1-x)p^2}{v_0^2} - \xi(p^2 - m^2) \int_0^1 dx \frac{x}{m^2 - xp^2} \right\}; \quad (7.4 \text{ б})$$

$$B_{D\xi} = \frac{1}{16\pi^2} \left\{ -3N_\epsilon + 1 + 2 \int_0^1 dx (1+x) \log \frac{xm^2 - x(1-x)p^2}{v_0^2} - \xi(p^2 - m^2) \int_0^1 dx \frac{x}{m^2 - xp^2} \right\}. \quad (7.4 \text{ в})$$

Здесь введено обозначение $N_\epsilon = 2/\epsilon - \gamma_E + \log 4\pi$.

В размерной регуляризации все полюсы появляются именно в такой комбинации. Используя равенство $\sum t_{ij}^a t_{ij}^a = C_F \delta_{ij} = \frac{4}{3} \delta_{ij}$ (см. приложение В), выражения (7.4) можно подставить в формулу (7.3) и получить кварковый пропагатор в виде

$$S_{D\epsilon}(p) = i \{ \not{p} - m + g^2 C_F \Sigma^{(2)} \}^{-1}; \quad (7.5 \text{ а})$$

$$S_{D\epsilon}(p) = i \frac{1 - C_F g^2 A_{D\epsilon}(p^2)}{\not{p} - m \{ 1 - C_F g^2 B_{D\epsilon}(p^2) \}} + \text{члены высших порядков.} \quad (7.5 \text{ б})$$

В действительности нетрудно убедиться, что формула (7.5а) точно учитывает вклад всех диаграмм рис. 4 и при замене $\Sigma^{(2)}$ на Σ^{exact} представляет собой наиболее общее выражение для пропагатора S . Из выражения (7.5б) видно, что расходимости возникают от следующих членов:

$$1 - C_F \frac{g^2}{16\pi^2} (1 - \xi) N_\epsilon \quad (\text{содержится в } A_{D\epsilon}) \quad (7.6)$$

(на него умножается свободный пропагатор S) и

$$1 + 3 C_F \frac{g^2}{16\pi^2} N_\epsilon \quad (\text{содержится в } B_{D\epsilon}) \quad (7.7)$$

(на него умножается масса кварка m). Но оба эти множителя конечны при условии $\epsilon \neq 0$.

Завершим данный параграф замечанием об инфракрасных расходимостях. В этой книге мы рассматриваем главным образом *ультрафиолетовые расходимости*, появляющиеся в пределе $k \rightarrow \infty$ и дающие особенности в виде полюсов гамма-функции $\Gamma(\epsilon/2)$. Но процедура размерной регуляризации позволяет также выделять полюсы, отвечающие *инфракрасной расходимости* и связанные с областью малых значений импульса $k \rightarrow 0$. Инфракрасные расходимости проявляются в вычислениях как особенности гамма-функции $\Gamma(-\epsilon/2)$. Детальное обсуждение этого вопроса можно найти в работе [134].

§ 8. Общие сведения о процедуре перенормировок

Рассмотрим следующий процесс. Фотон соударяется с u -кварком протона, а затем u -кварк за счет слабого взаимодействия распадается по схеме $u \rightarrow d + e^+ + \nu$ (рис. 5). В низшем порядке по константам связи электромагнитного и слабого взаимодействий и в нулевом порядке по константе сильных взаимодействий g в рассматриваемый процесс дает вклад только диаграмма рис. 5, а. Возможные глюонные поправки описываются диаграммами рис. 5, б – в. Аргументом кваркового пропагатора $S(p)$, фигурирующего в выражении для амплитуды рассеяния, является комбинация $p = p_\gamma + p_..$

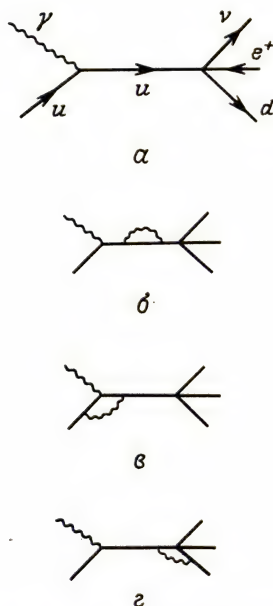


Рис. 5. Процесс рассеяния $\gamma + u \rightarrow \nu e^+ d$ и глюонные поправки к нему.

(обозначения очевидны); следовательно, выражение для амплитуды рассеяния оказывается расходящимся, и никаких выводов о ее поведении, по крайней мере в рамках теории возмущений, сделать нельзя.

В действительности это не так. При построении теории была допущена некоторая неточность. Рассмотрим для простоты скалярное взаимодействие вида $\bar{\psi}\psi\phi$, где поле ϕ безмассовое. Лагранжиан, описывающий систему взаимодействующих полей, имеет вид

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial - m)\psi + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + g\bar{\psi}\psi\phi. \quad (8.1)$$

Как уже говорилось выше, S -матрица определяется выражением

$$S = T \exp i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{int}}^0(x) \\ = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n T \mathcal{L}_{\text{int}}^0(x_1) \dots \mathcal{L}_{\text{int}}^0(x_n), \quad (8.2)$$

где входящие в лагранжиан $\mathcal{L}_{\text{int}}^0(x)$ поля рассматриваются как свободные и записываются в нормально упорядоченной форме. Член $\mathcal{L}_{\text{int}}^0$ совпадает с трилинейным членом выражения (8.1) после замены $\psi \rightarrow \psi^0$, $\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}^0$:

$$\mathcal{L}_{\text{int}}^0 = g : \bar{\psi}^0 \psi^0 : \phi^0. \quad (8.3)$$

Но эта процедура некорректна. Очевидно, что поля, фигурирующие в выражении (8.1), не являются свободными, а их масса m не совпадает с массой, которую имеет поле ψ в отсутствие взаимодействий. Это видно из выражения (7.5) для кваркового пропагатора, в котором масса кварка заменена на комбинацию вида $m \{1 - \frac{4}{3} g^2 B_D\}$, а числитель умножен на выражение $1 - \frac{4}{3} g^2 A_D$.

В силу свойства инвариантности теории по отношению к преобразованиям групп внутренней и пространственной симметрии допустимы лишь следующие изменения полей и параметров, фигурирующих в лагранжиане: изменения мультипликативного типа

$$\psi \rightarrow Z_\psi^{-1/2} \psi, \quad \phi \rightarrow Z_\phi^{-1/2} \phi, \quad g \rightarrow Z_g g, \quad m \rightarrow Z_m m, \quad (8.4)$$

и изменения, вызванные добавлением в лагранжиан некоторых дополнительных членов. Можно показать, что в рассматриваемом случае скалярного взаимодействия $\psi\psi\phi$ необходимо еще добавить в лагранжиан член вида $\lambda(\phi)^4$. Но мы пока этим членом пренебрежем. Таким образом, принимая во внимание только (8.4), из формулы (8.1) получаем выражение для так называемого "перенормированного" лагранжиана

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^R = & Z_\psi^{-1} \bar{\psi}_u i \partial \psi_u - Z_\psi^{-1} Z_m m \bar{\psi}_u \psi_u + Z_\phi^{-1} \partial_\mu \phi_u \partial^\mu \phi_u \\ & + Z_g Z_\psi^{-1} Z_\phi^{-1/2} g \bar{\psi}_u \psi_u \phi_u, \end{aligned} \quad (8.5)$$

откуда заключаем, что лагранжиан взаимодействия, определяемый как разность $\mathcal{L}_{\text{int}} \equiv \mathcal{L} - \mathcal{L}_{\text{free}}$, в действительности имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}}^{R0} = & g \bar{\psi}_u^0 \psi_u^0 \phi_u^0 + (Z_g^{1/2} Z_\psi^{-1} Z_\phi^{-1/2} - 1) g \bar{\psi}_u^0 \psi_u^0 \phi_u^0 \\ & + (Z_\psi^{-1} - 1) \bar{\psi}_u^0 i \partial \psi_u^0 - (Z_\psi^{-1} Z_m - 1) m \bar{\psi}_u^0 \psi_u^0 \\ & + (Z_\phi^{-1} - 1) \partial_\mu \phi_u^0 \partial^\mu \phi_u^0, \end{aligned} \quad (8.6)$$

где ψ_u^0 и ϕ_u^0 — свободные поля, удовлетворяющие каноническим коммутационным соотношениям. Члены, содержащие множители $(Z \dots - 1)$, называются *контрчленами*. Очевидно, что разложение этих членов в ряд по степеням константы связи g должно начинаться с единицы, так как при значении $g = 0$ все перенормировочные множители Z равны единице. Поэтому перенормировочные множители можно представить в виде ряда

$$Z_j = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_j^{(n)} \left(\frac{g^2}{16\pi^2} \right)^n, \quad (8.7)$$

где коэффициенты $C_j^{(n)}$ имеют конечное разложение в ряд Лорана в окрестности точки $\epsilon = 0$ (т.е. имеют вид $\sum_{k=0}^n a_k^{(n)} \epsilon^{-k} + O(\epsilon)$). Существует и другой способ проследить за возникновением контрчленов [45]. Из выражения (8.2) для S -матрицы видно, что вследствие сингулярного характера входящих в него полей хронологическое произведение

$$\mathcal{L}_{\text{int}}^0(x_1) \dots \mathcal{L}_{\text{int}}^0(x_n) \quad (8.8 \text{ а})$$

не определено при совпадающих аргументах $x_i = x_j$. Следовательно, к каждому члену разложения (8.2), имеющему вид (8.8а), можно добавить произвольное слагаемое вида

$$p(\partial)\delta(x_1 - x_2) \dots \delta(x_i - x_j) \dots \delta(x_{n-1} - x_n), \quad (8.8 \text{ б})$$

где символ p обозначает выражение, полиномиальное по оператору дифференцирования. Отсюда видно, что члены (8.8б) соответствуют контрчленам.

Насколько произвольны значения коэффициентов Z ? Одно из условий, определяющих их величину, состоит в требовании, чтобы лагранжиан \mathcal{L}^R приводил к конечным ответам даже в пределе $\epsilon \rightarrow 0$. Но это не полностью фиксирует коэффициенты $C_j^{(n)}$ в выражении (8.6б). Чтобы однозначным образом конкретизировать все *перенормировочные множители* Z , фигурирующие в теории, необходимо рассмотреть столько независимых амплитуд, сколько параметров должно быть определено.

Вернемся к лагранжиану КХД. Квантовая хромодинамика является калибровочной теорией поля, и, как мы видели, калибровочная инвариантность представляет собой необходимое условие того, чтобы эта теория имела смысл. Условие калибровочной инвариантности накладывает жесткие ограничения на допустимую структуру контрчленов: они должны быть калибровочно-инвариантными. Из выражения для лагранжиана $\mathcal{L}_{\text{QCD}}^\epsilon$ и выражения (5.11) видно, что единственными допустимыми изменениями являются замены¹⁾

$$\begin{aligned} q^i(x) &\rightarrow Z_F^{-1/2} q_a^i(x), \\ B_a^\mu(x) &\rightarrow Z_B^{-1/2} B_{ia}^\mu(x), \\ \omega_a(x) &\rightarrow Z_\omega^{-1/2} \omega_{ia}(x), \quad \bar{\omega}_a(x) \rightarrow Z_\omega^{-1/2} \bar{\omega}_{ia}(x), \\ g &\rightarrow Z_g g, \\ m_q &\rightarrow Z_{m,q} m_q, \\ \lambda &\rightarrow Z_\lambda \lambda. \end{aligned} \quad (8.9)$$

¹⁾ Отметим, что не все множители Z независимы. Например, из тождеств Славнова — Тейлора следует равенство $Z_\lambda = Z_B$ (см. § 9).

Калибровочная инвариантность приводит к тому, что все кварковые перенормировочные множители Z равны одной и той же величине Z_F . Аналогичное утверждение справедливо и для глюонных перенормировочных множителей, каждый из которых равен Z_B . Кроме того, перенормировочные множители для вершин $\bar{q}qB$, BBB , $BBBB$ и $\bar{\omega}\omega B$, которые, вообще говоря, могли бы быть разными, следует заменить *одним* перенормировочным множителем Z_g . Такого специфического набора перенормировочных множителей оказывается вполне достаточно, чтобы обеспечить конечность функций Грина. Это является следствием тождеств (в случае абелевых калибровочных теорий называемых тождествами Уорда, а в случае неабелевых теорий — тождествами Славнова — Тейлора), которым в силу калибровочной инвариантности должны удовлетворять функции Грина. Как уже отмечалось, эти тождества¹⁾ возникают в результате преобразований БРС. Ниже будут приведены некоторые из наиболее важных тождеств Славнова — Тейлора.

В заключение этого параграфа введем некоторые обозначения. Если в исходном лагранжиане провести замены (8.9), то мы получим выражение для *перенормированного* лагранжиана

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_R^\xi = & \sum_1 \{ i\tilde{q}\tilde{D}\tilde{q} - \tilde{m}_q\tilde{q}\tilde{q} \} - \frac{1}{4}(\tilde{D} \times \tilde{B})^2 - \frac{\lambda}{2}(\partial \tilde{B})^2 \\ & + \sum (\partial_\mu \tilde{\omega})\tilde{D}^\mu \tilde{\omega}, \end{aligned} \quad (8.10 \text{ а})$$

где тильда над символом означает, что данная величина содержит соответствующий множитель Z , например

$$\begin{aligned} \tilde{q} &= Z_F^{-1/2} q_u, \quad \tilde{m} = Z_m m, \dots, \\ \tilde{D}\tilde{q} &= (\partial - i\tilde{g}t\tilde{B})\tilde{q}, \dots \text{ и т.д.} \end{aligned} \quad (8.10 \text{ б})$$

Таким образом, лагранжиан \mathcal{L}_R^ξ формально совпадает с неперенормированным лагранжианом \mathcal{L}^ξ при замене всех входящих в него неперенормированных величин на перенормированные. Перенормированный лагранжиан \mathcal{L}_R^ξ можно представить в виде суммы

$$\mathcal{L}_R^\xi = \mathcal{L}_{uD}^\xi + \mathcal{L}_{\omega D}^\xi, \quad (8.11 \text{ а})$$

где член

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{uD}^\xi = & \sum_q \{ i\bar{q}_u D q_u - m\bar{q}_u q_u \} - \frac{1}{4}(D_u \times B_u)^2 - \frac{\lambda}{2}(\partial B_u)^2 \\ & + (\partial_\mu \omega_u) D^\mu \omega_u, \end{aligned} \quad (8.11 \text{ б})$$

¹⁾ Детальное исследование тождеств Уорда и Славнова — Тейлора можно найти в книгах [114, 189].

содержит перенормированные, или "голые", поля, заряды и массы, а член

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{ctD}^{\xi} &= \mathcal{L}_R^{\xi} - \mathcal{L}_{uD}^{\xi} \\ &= (Z_F^{-1} - 1) i \sum_q \bar{q}_u \partial q_u \\ &\quad + (Z_F^{-1} Z_B^{-1/2} Z_g - 1) g \sum \bar{q}_u \gamma_{\mu} t^a q_u B_{ua}^{\mu} + \dots\end{aligned}\quad (8.11 \text{ в})$$

описывает вклад контрчленов.

Мы видим, что в рамках теории возмущений взаимодействие описывается не только членами $g \sum \bar{q}_u^0 \gamma_{\mu} t^a q_u^0 B_{ua}^{0\mu}, \dots$, но и членами $i(Z_F^{-1} - 1) \times \sum \bar{q}_u^0 \not{\partial} q_u^0$ и и.д. При этом поля $q_u^0, B_{ua}^0, \omega_u^0$ удовлетворяют каноническим коммутационным соотношениям для свободных полей и порождают набор фейнмановских правил диаграммной техники, которые приведены в приложении Г. Следует отметить, что оба члена лагранжиана \mathcal{L}_{uD}^{ξ} и \mathcal{L}_{ctD}^{ξ} требуют регуляризации; возникающие при этом бесконечности должны сокращаться так, чтобы лагранжиан \mathcal{L}_R^{ξ} при переходе к физическому пределу $D \rightarrow 4$ приводил к конечным выражениям. Далеко не очевидно, что существуют перенормировочные множители Z , удовлетворяющие этому требованию, и действительно (по крайней мере в рамках теории возмущений) далеко не все теории поля обладают свойством перенормируемости. Доказательство перенормируемости неабелевых калибровочных теорий, в частности квантовой хромодинамики, впервые было проведено т'Хофтом [248]¹¹. В этой книге перенормируемость КХД не доказывается; мы лишь убедимся, что лагранжиан \mathcal{L}_R^{ξ} в низших порядках теории возмущений приводит к конечным результатам.

В рамках излагаемой здесь теории перенормировок, основывающейся главным образом на монографии Боголюбова и Ширкова [45], конечные (перенормированные) функции Грина выражаются через вакуумные средние вида

$$\langle 0 | T q_u(x_1) \dots B_u(\gamma_1) \dots \omega_u(z_1) \dots | 0 \rangle,$$

для вычисления которых по теории возмущений используется полный (содержащий и контрчлены) лагранжиан взаимодействий (8.11). Однако мультипликативный характер перенормировок допускает иной подход к рассматриваемой проблеме. Можно пренебречь контрчленами и просто переопределить поля и константы связи, фигурирующие в функциях Грина в соответствии с формулами (8.9). Более подробно это изложено в последующих параграфах. Следует также отметить, что проводимые здесь процедуры перенормировок выполняются в рамках теории возмущений. Это означает, что все вычисления

¹¹ См. также работу [190]. Изложение современного состояния проблемы перенормировок в КХД можно найти в работе [114].

должны проводиться самосогласованно в одном и том же порядке по константе взаимодействия как в первоначальных членах взаимодействия, так и в контрчленах.

§ 9. Перенормировка в КХД (однопетлевое приближение)

1. μ -перенормировка

Рассмотрим перенормированный лагранжиан квантовой хромодинамики. Для этого необходимо задать значения перенормировочных множителей Z . Начнем с определения перенормированных функций Грина

$$G_{uD}(x_1, \dots, x_N),$$

которые вычисляются по перенормированному лагранжиану \mathcal{L}_u^ξ . Функция G представляет собой вакуумное среднее от произведения полей

$$\langle T\Phi_1(x_1) \dots \Phi_N(x_N) \rangle_0 = G(x_1, \dots, x_N), \quad (9.1)$$

где символы Φ_k соответствуют полям кварков q_u , глюонов ω_u , глюонов B_u или в общем случае содержащим их локальным операторам. Используя теорию возмущений, функции Грина можно представить в виде следующего ряда:

$$G_{uD}(x_1, \dots, x_N) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4z_1 \dots d^4z_n \times \langle T\Phi_1^0(x_1) \dots \Phi_N^0(x_N) \mathcal{L}_{uD,int}^\xi(z_1) \dots \mathcal{L}_{uD,int}^\xi(z_n) \rangle_0. \quad (9.2)$$

Вообще говоря, перенормированные функции Грина G_{uD} расходятся в физическом пределе $D \rightarrow 4$. Перенормированные функции Грина определяются в виде

$$G_R(x_1, \dots, x_N) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4z_1 \dots d^4z_n \times \langle T\Phi_1^0(x_1) \dots \Phi_N^0(x_N) \mathcal{L}_{R,int}^\xi(z_1) \dots \mathcal{L}_{R,int}^\xi(z_n) \rangle_0. \quad (9.3)$$

Потребуем, чтобы перенормированная функция G_R была конечной, т.е. чтобы контрчлены, содержащиеся в выражении (9.3), сокращали сингулярности, присутствующие в формуле (9.2). В случае квантовой хромодинамики имеет место шесть различных перенормировочных множителей. Для их однозначного определения достаточно рассмотреть шесть независимых функций Грина. Независимость результата от выбора конкретных функций Грина, по которым фиксируются перенормировочные множители, является следствием тождеств

деств Уорда – Славнова – Тейлора, которым эти функции подчиняются. Данное утверждение представляет собой нетривиальную часть перенормировочной процедуры. Здесь мы для определенности выберем конкретный набор функций Грина, необходимых для фиксации перенормировочных множителей. Все вычисления будем проводить в импульсном пространстве. Начнем с пропагатора кварков

$$S_{R\xi}(p) = i\{p - m + \Sigma(p)\}^{-1}, \quad \Sigma(p) = (p - m)A(p^2) + mB(p^2). \quad (9.4 \text{ а})$$

Выберем пространственноподобный импульс \bar{p} , удовлетворяющий условию $\bar{p}^2 < 0$ ¹⁾. Тогда можно определить значения величин

$$A_{\xi R}(\bar{p}^2), B_R(\bar{p}^2), \quad (9.4 \text{ б})$$

первая из которых позволяет фиксировать множитель Z_F , а вторая – комбинацию из множителей Z_F , Z_m и Z_λ . Затем обратимся к рассмотрению глюонного пропагатора

$$D_{R\xi}^{\mu\nu}(q) = (-q^2 g^{\mu\nu} + q^\mu q^\nu) D_{Rtr}(q) + g^{\mu\nu} D_{RL}(q). \quad (9.5 \text{ а})$$

Для простоты рассмотрим случай $q = \bar{p}$. Фиксируя значения

$$D_{Rtr}(\bar{p}), \quad D_{RL}(\bar{p}), \quad (9.5 \text{ б})$$

получим выражения для глюонного перенормировочного множителя Z_B и для комбинации Z_B и Z_λ . Рассмотрим пропагатор духов²⁾

$$G_R(p) = \int d^4x e^{-ip \cdot x} \langle T \omega(x) \bar{\omega}(0) \rangle_0. \quad (9.6 \text{ а})$$

Выбирая $p = \bar{p}$ и задавая величину

$$G_R(\bar{p}), \quad (9.6 \text{ б})$$

фиксируем значение перенормировочного множителя духов Z_ω . Рассмотрение любой из вершин $\bar{q}qB$, BBB , $BBBB$ или $\bar{\omega}\omega B$ позволяет фиксировать зарядовый перенормировочный множитель Z_g . Выберем для этой цели первую из них. Если "усеченную" вершину V определить формулой

$$\begin{aligned} & \int d^4x d^4y e^{-ip_1 \cdot x} e^{ip_2 \cdot y} \langle q_\beta^k(y) B_\mu^a(0) \bar{q}_\alpha^j(x) \rangle_0 \\ &= \sum D_{\mu\nu}^{ab}(p_2 - p_1) S_{\beta\alpha}^{ki}(p_2) V_{R\xi, \alpha'\beta'}^{il; b, \nu}(p_1, p_2) S_{\beta'\alpha'}^{lj}(p_1), \end{aligned} \quad (9.7 \text{ а})$$

¹⁾ Это позволяет избежать расходимостей функций Грина, возникающих при временноподобных импульсах p , удовлетворяющих условию $p^2 \geq m^2$.

²⁾ В дальнейшем везде, где это не может вызвать недоразумений, индекс i мы будем опускать.

$$V_{R\xi;\alpha'\beta'}^{il,b,\nu} = i_{il}^b \gamma_{\alpha'\beta'}^\nu + \dots,$$

то можно определить вершину V при $\bar{p}^2 = -\mu^2$, $\mu^2 > 0$:

$$V_{R\xi}|_{p_1^2=p_2^2=(p_1-p_2)^2=-\mu^2}. \quad (9.7 \text{ б})$$

Как уже отмечалось, выполнение перенормировочной процедуры в значительной мере облегчается тем, что перенормированный лагранжиан \mathcal{L}_R^ξ можно получить из "затравочного" лагранжиана \mathcal{L}_{uD}^ξ , проводя замену фигурирующих в нем полей по формулам (8.9). Для того чтобы вычислить любую функцию Грина, запишем ее в импульсном представлении и *отсечем* все внешние линии. При этом получим величину $\Gamma(p_1, \dots, p_{N-1}; m, g, \lambda)$, определяемую формулой

$$\Gamma(p_1, \dots, p_{N-1}; m, g, \lambda) \delta(\Sigma p) = K_1(p_1) \dots K_N(p_N) \int d^4 x_1 \dots d^4 x_N e^{i \Sigma x_k \cdot p_k} \times \langle T \Phi_1(x_1) \dots \Phi_N(x_N) \rangle_0; \quad (9.8)$$

где K_k — обратные пропагаторы; для фермионных полей $iK(p) = S_R^{-1}(p)$, для глюонных полей $iK(p) = D_R^{-1}(p)$ и т.д. ¹⁾ Вычислим перенормированную функцию Грина

$$\Gamma_{uD}(p_1, \dots, p_{N-1}; m, g, \lambda),$$

используя для этого лагранжиан $\mathcal{L}_{uD, \text{int}}^\xi$ (выражение (9.2)). Тогда перенормированная функция Грина Γ_R получается из перенормированной функции Грина Γ_{uD} :

$$\Gamma_R(p_1, \dots, p_{N-1}; m, g, \lambda) = Z_{\Phi_1}^{-1/2} \dots Z_{\Phi_N}^{-1/2} \Gamma_{uD}(p_1, \dots, p_{N-1}; Z_m m, Z_g g, Z_\lambda \lambda). \quad (9.9)$$

Это выражение приобретает более прозрачный смысл, если ввести следующие обозначения для затравочных параметров ²⁾:

$$m_{uD} = Z_{mq} m_q, \quad \lambda_{uD} = Z_\lambda \lambda, \quad g_{uD} = Z_g g; \quad (9.10)$$

тогда выражение (9.9) принимает вид

$$\Gamma_R(p_1, \dots, p_{N-1}; m, g, \lambda) = Z_{\Phi_1}^{1/2} \dots Z_{\Phi_N}^{1/2} \Gamma_{uD}(p_1, \dots, p_{N-1}; m_{uD}, g_{uD}, \lambda_{uD}). \quad (9.11)$$

¹⁾ Отсечение внешних линий устраняет связанные с ними полюса фейнмановских диаграмм. Так как пропагаторы S_R и D_R перенормированы, функция Грина содержит множитель $Z_\Phi^{-1/2}$ для каждого из полей и множитель Z_Φ для каждой величины K_Φ , так что для каждой полевой функции Φ возникает эффективный множитель $Z_\Phi^{1/2}$.

²⁾ Массы и калибровочный параметр иногда удобно рассматривать как некоторые константы связи.

Для того чтобы проиллюстрировать, как работает описанная процедура, рассмотрим пропагатор кварка. Согласно общему рецепту, с учетом обозначения $\alpha_g \equiv g^2/(4\pi)$ можно записать следующее соотношение между перенормированным и перенормированным пропагаторами:

$$S_R(p; g_R, m_R, \lambda_R) = Z_F^{1/2} Z_F^{1/2} S_{uD}(p; Z_g g, Z_m m, Z_\lambda \lambda).$$

Все вычисления будут проводиться во втором порядке теории возмущений. Поэтому множители Z_g и Z_λ можно заменить на единицу, так как возникающие при этом поправки будут иметь более высокий порядок малости по константе связи α_g . Используя формулы (7.4), (7.5), получаем выражение для пропагатора кварка

$$S_R(p; g, m, \alpha) = Z_F^{-1} \frac{i}{(\bar{p} - Z_m m)} = i Z_F^{-1} \frac{1 - C_F g^2 A_{D\xi}(p^2)}{\bar{p} - Z_m m \{1 - C_F g^2 B_{D\xi}(p^2)\}}.$$

Как отмечалось выше, для того чтобы определить перенормировочный множитель Z , нужно задать значение кваркового пропагатора S_R при некотором заданном 4-импульсе $p = \bar{p}$. Потребуем, чтобы в этой точке перенормированный пропагатор S_R совпадал с пропагатором свободной частицы

$$S_R(\bar{p}; g, m, \alpha) = \frac{i}{\bar{p} - m}. \quad (9.12)$$

Таким образом, находим, что при $\bar{p}^2 = -\mu^2$ перенормировочный множитель Z_F имеет вид

$$\begin{aligned} Z_F &\equiv Z_{FD}(\mu^2, m^2) \\ &= 1 - C_F \frac{\alpha_g}{4\pi} \left\{ (1 - \xi) N_\epsilon - 1 - \int_0^1 dx [2(1 - x) - \xi] \right. \\ &\quad \times \log \frac{xm^2 + x(1 - x)\mu^2}{v_0^2} + \xi(\mu^2 + m^2) \int_0^1 dx \frac{x}{m^2 + \mu^2 x} \left. \right\}, \end{aligned} \quad (9.13)$$

$$\begin{aligned} Z_m &\equiv Z_m(\mu^2, m^2) \\ &= 1 - C_F \frac{\alpha_g}{4\pi} \left\{ 3N_\epsilon - 1 - 2 \int_0^1 dx (1 + x) \log \frac{xm^2 + x(1 - x)\mu^2}{v_0^2} \right. \\ &\quad \left. + \xi(\mu^2 + m^2) \int_0^1 dx \frac{x}{m^2 + \mu^2 x} \right\}. \end{aligned} \quad (9.14)$$

Нужно подчеркнуть следующий важный факт: в то время как расходящаяся часть перенормировочного множителя Z_F зависит от калибровки, расходящаяся часть множителя Z_m калибровочно-независима, хотя в рамках данной схемы конечная часть перенормировочного множителя Z_m все еще зависит от калибровки. Калибровочная зависимость множителя Z_F означает, что можно выбрать такую калибровку, в которой этот множитель *конечен*. Из выражения (9.13) видно, что во втором порядке теории возмущений фермионный перенормировочный множитель Z_F конечен в калибровке Ландау, когда $\xi = 1$ ¹⁾.

В квантовой электродинамике существует естественная перенормировочная схема; в ней электроны и фотоны выбираются на массовой поверхности (т.е. электронный пропагатор S задается в точке $\vec{p}^2 = m^2$, а фотонный D — при $\vec{q}^2 = 0$). Поскольку в КХД, по-видимому, происходит удержание кварков и глюонов, в ней не существует столь же естественного способа выбора схемы перенормировки. Следовательно, имеется определенный произвол в выборе перенормировочной схемы который может быть использован для того, чтобы максимально упростить вычисления. Этим требованиям удовлетворяет схема минимального вычитания, к обсуждению которой мы переходим.

2. Схема минимального вычитания

Как заметил г'Хофт [249], простейший способ исключения расходимостей из функций Грина состоит в отбрасывании полюсов по параметру $1/\epsilon$, появляющихся в размерной регуляризации (*минимальное вычитание MS*). Впоследствии было показано [29], что эти полюса всегда появляются в комбинации

$$N_\epsilon = \frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \log 4\pi. \quad (9.15)$$

Следовательно, если отбросить только член $2/\epsilon$, то остаются трансцендентные величины γ_E , $\log 4\pi$. Напомним, что эти величины возникают в результате обобщения проводимых вычислений на случай пространства произвольной размерности $D = 4 - \epsilon$, что находит свое отражение в членах вида

$$(4\pi)^{\epsilon/2} \Gamma(\epsilon/2) = N_\epsilon + O(\epsilon).$$

Кажется вполне естественным отбросить и эти трансцендентные слагаемые. Это требование приводит к *модифицированной схеме минимального вычитания* (в дальнейшем обозначаемой *MS*), в которой множитель N_ϵ исключается пол-

¹⁾ Калибровка Ландау удобна в теории, описывающей безмассовые частицы. В этой калибровке не только перенормировочный множитель Z_F конечен, но и массовый оператор Σ ⁽²⁾ равен нулю.

ностью¹⁾. В рамках этой схемы находим следующие выражения для перенормировочных множителей:

$$\bar{Z}_F = 1 - C_F \frac{\alpha_g}{4\pi} (1 - \xi) N_\epsilon, \quad (9.16)$$

$$\bar{Z}_m = 1 - C_F \frac{3\alpha_g}{4\pi} N_\epsilon. \quad (9.17)$$

Мы будем пользоваться в основном схемой \overline{MS} , поэтому черту над перенормировочными множителями \bar{Z} , относящимися к этой схеме, в дальнейшем будем опускать. (В схеме MS множитель Z_m не зависит от калибровки. В двухпетлевом приближении это проверено в работе [242], но результат, по-видимому, справедлив во всех порядках теории возмущений вследствие калибровочной независимости массового члена $m\bar{q}q$.) Из выражений (9.16) и (9.17) видно, что, определив коэффициент c выражением $C = c N_\epsilon$, можно написать

$$c_F^{(1)} = -C_F(1 - \xi), \quad (9.18)$$

$$c_m^{(1)} = -3C_F. \quad (9.19)$$

Эти вычисления были проведены и во втором порядке теории возмущений²⁾.

Вычислим теперь в схеме \overline{MS} другие перенормировочные константы. Начнем с глюонного пропагатора. Поперечная часть глюонного пропагатора записывается в виде

$$\begin{aligned} D_{\text{utr},ab}^{\mu\nu}(q, g_u, m_u, \lambda_u) = & i \frac{-g^{\mu\nu} + q^\mu q^\nu / q^2}{q^2} \delta_{ab} \\ & + \sum \frac{-g^{\mu\mu'} + q^\mu q^{\mu'} / q^2}{q^2} \delta_{aa'} \Pi_{\mu'\nu'}^{a'b'} \delta_{b'b} \\ & \times i \frac{-g^{\nu\nu'} + q^{\nu'} q^{\nu} / q^2}{q^2} + \dots \end{aligned} \quad (9.20)$$

В этом выражении во втором порядке теории возмущений не требуется проведения перенормировки константы связи, калибровочного параметра или массы. Часть поляризационного оператора Π , обусловленная вкладами

¹⁾ Схема \overline{MS} может быть сведена к схеме MS заменой выражения $d_k^D = v_0^{4-D} \times d_k^D / (2\pi)^D$ на выражение $d_k^D = \{v_0^{4-D} / (2\pi)^D\} / \{(4\pi)^{(4-D)/2} \Gamma(3-D/2)\}$.

²⁾ Вычисления были проведены Нанопулосом и Россом [208]; Таррач [242]

проверил их и исправил тривиальную ошибку, допущенную в оригинальной работе [208].

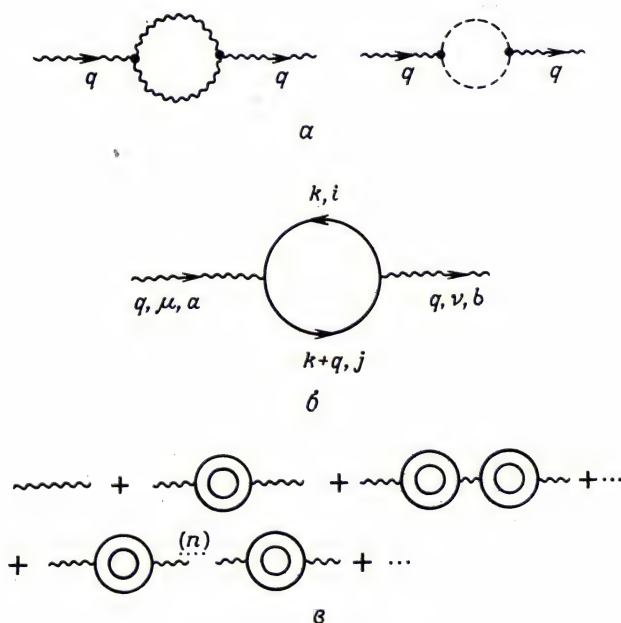


Рис. 6. Глюонный пропагатор.

духов и глюонов (рис. 6, а), вычислена выше (выражение (5.9)¹⁾. Часть оператора Π , возникающая от вклада кварковой петли (рис. 6, б), для кварка каждого аромата f записывается в виде

$$\Pi_{f\text{quark};ab}^{\mu\nu} = -ig^2 \sum_{ij} t_{ij}^a t_{ji}^b \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \nu_0^{4-D} \frac{\text{Tr}(\not{k} + m_f) \gamma^\mu (\not{k} + \not{q} + m_f) \gamma^\nu}{(k^2 - m_f^2) [(k+q)^2 - m_f^2]}.$$

Вычисление этого выражения проводится стандартными методами. За исключением множителя $\text{Tr} t^a t^b$, результат совпадает с хорошо известным из КЭД выражением для фотонного поляризационного оператора. Если через n_f обозначить полное число ароматов кварков, то результат имеет вид

$$\Pi_{\text{all quarks};ab}^{\mu\nu} = \delta_{ab} \frac{-2T_F g^2}{16\pi^2} (-g^{\mu\nu} q^2 + q^\mu q^\nu) \times \left\{ \frac{2}{3} N_\epsilon n_f - 4 \int_0^1 dx \cdot x(1-x) \sum_{f=1}^{n_f} \log \frac{m_f^2 - x(1-x)q^2}{\nu_0^2} \right\}. \quad (9.21)$$

¹⁾ Выражение (5.9) получено без учета множителя ν_0^{4-D} . Если учесть его, то единственное изменение заключается в замене $\log(-q^2)$ на $\log(-q^2/\nu_0^2)$.

Во втором порядке теории возмущений можно просуммировать все диаграммы рис. 6, в, где кружками обозначены петли кварков, глюонов или духов. Выделяя из поляризационного оператора тензорную структуру вида

$$\Pi_{a'b'}^{\mu'\nu'} = -\delta_{a'b'}(-g^{\mu'\nu'}q^2 + q^{\mu'}q^{\nu'})\Pi, \quad (9.22 \text{ а})$$

получаем аналог выражения (7.5)

$$D_{u \text{ tr}; ab}^{\mu\nu}(q) = i\delta_{ab} \frac{-g^{\mu\nu} + q^\mu q^\nu / q^2}{(1 - \Pi)q^2}. \quad (9.22 \text{ б})$$

Введем запись

$$f^{\text{div}} = g,$$

которая означает, что коэффициенты при члене N_ϵ в выражениях для величин f и g равны. Тогда перенормированный глюонный пропагатор D запишется в виде

$$D_{R \text{ tr}; ab}^{\mu\nu} = Z_B^{-1} D_{u \text{ tr}; ab}^{\mu\nu}.$$

Из уравнений (5.9), (9.20) и (9.21) следует равенство

$$1 - \Pi^{\text{div}} = 1 + \frac{g^2}{32\pi^2} \left\{ \frac{10C_A}{3} - \frac{8T_F n_f}{3} \right\} N_\epsilon.$$

Следовательно, в рамках схемы \overline{MS} в калибровке Ферми — Фейнмана для перенормировочного множителя получаем выражение

$$Z_B = 1 + \frac{\alpha_g}{8\pi} \left\{ \frac{10C_A}{3} - \frac{8T_F n_f}{3} \right\} N_\epsilon. \quad (9.23)$$

В произвольной калибровке перенормировочный множитель Z_B был вычислен в работах [160, 218]. Соответствующий коэффициент $c_{B\xi}^{(1)}$ равен

$$c_{B\xi}^{(1)} = \frac{1}{2} \left\{ 10 + 3\xi - \frac{4n_f}{3} \right\}. \quad (9.24)$$

Опуская вычисления, приведем лишь конечный результат для перенормировочного множителя $Z_\lambda^{(1)}$

$$c_{\lambda\xi}^{(1)} = c_{B\xi}^{(1)}. \quad (9.25)$$

Следует отметить, что в калибровке Ландау параметр ξ в однопетлевом приближении не перенормируется. В действительности, как показано в § 6,

¹⁾ С м., например, работу [222] и цитируемую там литературу. Тождества Славнова — Тейлора, доказанные в § 6, обеспечивают выполнение равенства $Z_B = Z_\lambda$ во всех порядках теории возмущений.

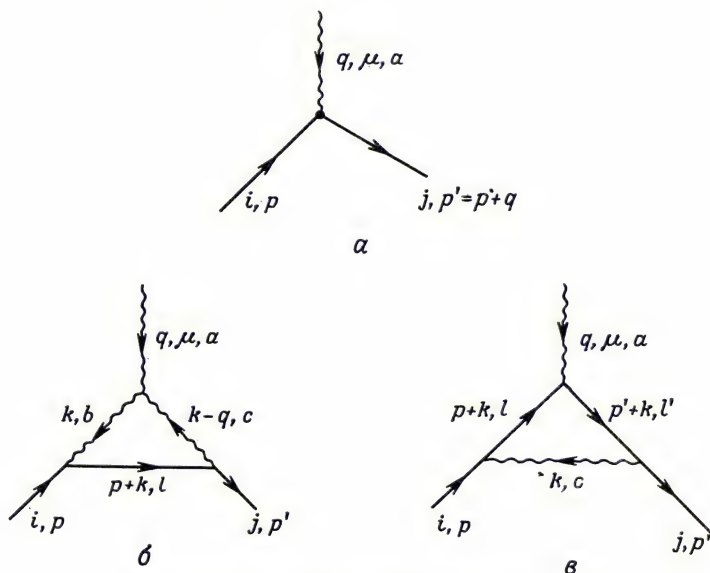


Рис. 7. Вершина кварк-глюонного взаимодействия.

тождества Славнова — Тейлора обеспечивают справедливость этого утверждения во всех порядках теории возмущений.

В заключение этого параграфа вычислим перенормировочный множитель Z_g . Для этого используем вершину $\bar{g}gB$. Выбирая обозначения 4-импульсов в соответствии с рис. 7, можно записать выражение для этой вершины во втором порядке теории возмущений в виде (ср. с (9.7))

$$V_{uij,a}^\mu = ig\gamma^\mu t_{ij}^a + i\Gamma_{uij,a}^{(2)\mu}, \quad (9.26 \text{ а})$$

где

$$\Gamma_{uij,a}^{(2)\mu}(p, p') = \{\Gamma^{(b)} + \Gamma^{(c)}\}_{uij,a}^\mu. \quad (9.26 \text{ б})$$

Величины $\Gamma^{(b)}$ и $\Gamma^{(c)}$ обозначают вклады от диаграмм рис. 7, б и в соответственно. Диаграмма рис. 7, а приводит к первому члену $ig\gamma^\mu$ в формуле (9.26а). Из рассмотренных выше примеров очевидно, что массы кварков не играют роли в выражениях для перенормировочных множителей Z (за исключением, конечно, множителя Z_m), поэтому можно упростить вычисления, положив $m = 0$. При этом следует учитывать только расходящиеся части вершин Γ . Тогда в калибровке Ферми — Фейнмана для рассматриваемой

вершины имеем

$$i\Gamma_{uij,a}^{(b)\mu \text{ div}} = ig \int d^D \hat{k} \frac{\gamma^\beta [(2k - q)^\mu g_{\alpha\beta} - (k + q)_\beta g_\alpha^\mu + (2q - k)_\alpha g_\beta^\mu] (\not{p} + \not{k}) \gamma^\alpha}{[(p + k)^2 + i0][(k - q)^2 + i0](k^2 + i0)} C_{ij}^a$$

$$\stackrel{\text{div}}{=} ig C_{ij}^a \gamma^\mu \lim_{\eta \rightarrow 0} \int d^D \hat{k} \frac{2(2 - D)/D - 2}{(k^2 - i\eta)^2} \stackrel{\text{div}}{=} g \frac{3N_\epsilon C_{ij}^a}{16\pi^2} \gamma^\mu. \quad (9.27 \text{ а})$$

Здесь использованы обозначения

$$d^D \hat{k} \equiv \frac{d^D k}{(2\pi)^D} v_0^{4-D},$$

$$C_{ij}^a \equiv -g^2 \sum t_{ji}^b t_{ij}^c f^{abc} = \frac{1}{2} g^2 [t^b, t^c]_{ji} f^{bca}$$

$$= g^2 \frac{i}{2} C_A t_{ij}^a = \frac{3}{2} i t_{ij}^a g^2.$$

При выводе последнего выражения использовано свойство антисимметрии константы f по отношению к перестановке индексов, благодаря которому можно заменить $t^b t^c$ на коммутатор $\frac{1}{2} [t^b, t^c]$. Аналогично получаем выражение для вклада, возникающего от γ -диаграммы рис. 7, в:

$$i\Gamma_{uij,a}^{(c)\mu \text{ div}} = -i^2 g \int d^D \hat{k} \frac{\gamma_\beta (\not{p} + \not{k}) \gamma^\mu (\not{p}' + \not{k}) \gamma_\alpha g^{a\beta}}{[(p + k)^2 + i0][(p' + k)^2 + i0](k^2 + i0)} C_{ij}'^a$$

$$\stackrel{\text{div}}{=} ig \frac{N_\epsilon}{16\pi^2} \gamma^\mu C_{ij}'^a. \quad (9.27 \text{ б})$$

Здесь

$$C_{ij}'^a = g^2 \sum_c (t^c t^a t^c)_{ij} = g^2 \sum_c ([t^c, t^a] t^c)_{ij} + g^2 \left(t^a \sum_c t^c t^c \right)_{ij}$$

$$= g^2 t_{ij}^a \left\{ -\frac{1}{2} C_A + C_F \right\}. \quad (9.27 \text{ в})$$

При выводе этого выражения использованы формулы приложения В. Таким образом, окончательное выражение для вершины Γ имеет вид

$$\Gamma_{uij,a}^{(2)\mu \text{ div}} = \frac{N_\epsilon g^3}{16\pi^2} \{ C_A + C_F \} i t_{ij}^a \gamma^\mu. \quad (9.28)$$

В перенормировке вершины участвуют множители Z_g , Z_F и Z_B :

$$V_{kij,a}^\mu = Z_F^{-1} Z_B^{-1/2} Z_g V_{uij,a}^\mu. \quad (9.29)$$

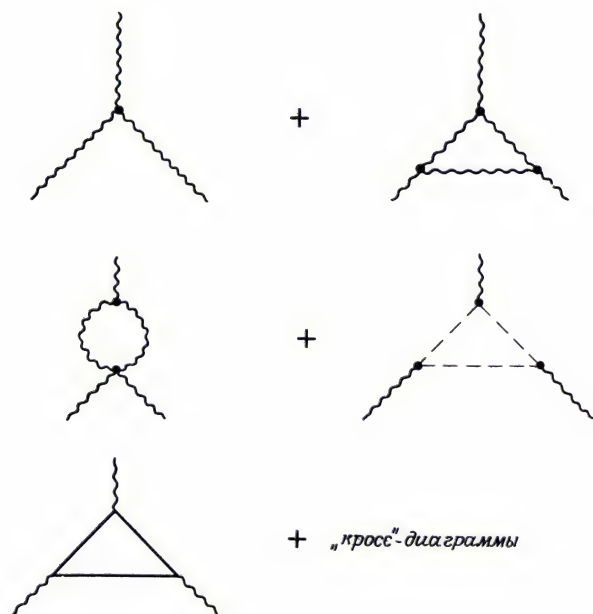


Рис. 8. Трехглюонная вершина.

Используя полученные выше выражения для перенормировочных множителей Z_F и Z_B и только что вычисленное значение расходящейся части вершины $\Gamma_u^{(2)}$, получаем следующий результат для зарядового перенормировочного множителя:

$$Z_g = 1 - \frac{\alpha_g}{4\pi} \left\{ \frac{11C_A}{6} - \frac{2}{3} T_F n_f \right\} N_\epsilon. \quad (9.30)$$

Таким образом,

$$c_g^{(1)} = - \left\{ \frac{11}{2} - \frac{n_f}{3} \right\}.$$

Интересно проследить за сокращением членов, пропорциональных множителю C_F . Такое сокращение обязательно должно иметь место в силу того, что зарядовый перенормировочный множитель Z_g можно вычислить в рамках чистой глюодинамики, не содержащей фермионов (см. ниже). Очевидно, что такое сокращение происходит благодаря калибровочной структуре теории, см. выражение (9.27в). В следующем порядке теории возмущений функция β вычислена в работах [64, 179]. Вычисления коэффициента $c_g^{(1)}$ были проведены Гроссом и Вильчеком [160] и Полицером [218], которые внес-

то кварк-глюонной вершины $\bar{q}qV$ использовали трехглюонную вершину. Такое вычисление связано с рассмотрением диаграмм рис. 8. Для этих же целей можно использовать вершину взаимодействия глюонов и духов $\bar{\omega}\omega V$. Конечно, все способы рассмотрения приводят к одному и тому же результату, что является следствием калибровочной инвариантности теории.

Следует отметить, что во всех порядках теории возмущений коэффициенты $c_g^{(n)}$, вычисленные в схеме \overline{MS} , калибровочно-инвариантны [65].

§ 10. Глобальные симметрии лагранжиана КХД; сохраняющиеся токи

В этом параграфе мы рассмотрим *глобальные* симметрии лагранжиана КХД. Поскольку процедура перенормировок не меняет структуры лагранжиана, можно пренебречь различием между затравочным и перенормированным лагранжианами.

Очевидно, что лагранжиан инвариантен по отношению к преобразованиям из группы Пуанкаре $x \rightarrow \Lambda x + a$. Токи, соответствующие лоренцевым преобразованиям Λ (являющимся генераторами полного спина системы), для нас не представляют большого интереса. Согласно теореме Нётер, инвариантность лагранжиана относительно пространственно-временных сдвигов приводит к следующему выражению для *тензора энергии-импульса*:

$$\Theta^{\mu\nu} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_i)} \partial^\nu \Phi_i - g^{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (10.1)$$

где суммирование по i проводится по всем полям, фигурирующим в лагранжиане КХД. Из тензора энергии-импульса можно построить токи, удовлетворяющие условию сохранения

$$\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0,$$

и соответствующие этим токам сохраняющиеся "заряды", представляющие собой компоненты 4-импульса

$$P^\mu = \int d\vec{x} \Theta^{0\mu}(x).$$

Явное выражение для тензора энергии-импульса в квантовой хромодинамике имеет вид ¹⁾

¹⁾ При квантовании теории произведение классических полей следует заменить на нормально упорядоченное произведение. Обсуждение вопроса о неоднозначности определения тензора энергии-импульса см. в работах [60, 74].

Тензор энергии-импульса определяется неоднозначно. В действительности из выражения (10.1) калибровочно-инвариантного выражения для тензора энергии-импульса получить не удастся. Выражение же (10.2) возникает при замене обычных

$$\Theta^{\mu\nu} = i \sum_q \bar{q} \gamma^\mu D^\nu q - g^{\mu\nu} i \sum_q \bar{q} \not{D} q + g^{\mu\nu} \sum_q m_q \bar{q} q - g_{\alpha\beta} G^{\mu\alpha} G^{\nu\beta} + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} G^2 + \text{члены, фиксирующие калибровку} + \text{вклад духов.} \quad (10.2)$$

Далее, существуют токи и заряды, связанные с вращениями в цветовом пространстве. Вывод формул для сохраняющихся токов, отвечающих глобальной внутренней симметрии лагранжиана КХД, мы оставляем читателю в качестве упражнения. Этот вывод представляет собой частный случай цветых калибровочных преобразований (с постоянными калибровочными параметрами) и приводит к набору токов, *не связанных* с взаимодействием кварков и глюонов.

Если массы всех кварков равны нулю, то лагранжиан \mathcal{L} инвариантен относительно преобразований вида

$$q_f \rightarrow \sum_{f'=1}^{n_f} U_{ff'} q_{f'}, \quad q_f \rightarrow \sum_{f'=1}^{n_f} V_{ff'} \gamma_5 q_{f'}, \quad (10.3)$$

при условии, что матрицы U и V представляют собой унитарные матрицы размерности $n_f \times n_f$. Отсюда следует, что токи

$$V_{qq'}^\mu(x) = \bar{q}(x) \gamma^\mu q'(x), \quad A_{qq'}^\mu(x) = \bar{q}(x) \gamma^\mu \gamma_5 q'(x) \quad (10.4)$$

сохраняются каждый в отдельности. Если теперь в лагранжиане \mathcal{L} учесть массовые члены, то сохраняется только диагональный ток V_{qq}^μ ; остальные токи при этом являются *квазисохраняющимися*, т.е. их дивергенции пропорциональны массам кварков. Вычисление дивергенций этих токов не представляет большой сложности; поскольку преобразования (10.3) коммутируют с членами лагранжиана \mathcal{L} , описывающими взаимодействие кварков и глюонов, вычисления можно проводить в терминах свободных полей. В этом случае использование уравнения Дирака $i \not{D} q = m_q q$ приводит к следующим выражениям:

$$\partial_\mu V_{qq'}^\mu = i(m_q - m_{q'}) \bar{q} q'; \quad \partial_\mu A_{qq'}^\mu = i(m_q + m_{q'}) \bar{q} \gamma_5 q'. \quad (10.5)$$

Однако имеется одна тонкость, касающаяся расходимости аксиальных токов. Выражение (10.5) справедливо в случае недиагональных переходов ($q \neq q'$); если же начальный и конечный кварки совпадают ($q = q'$), то его следует

производить на ковариантные. Или, иначе, калибровочно-инвариантное выражение для тензора энергии-импульса можно получить из выражения (10.1), производя калибровочные преобразования одновременно с пространственно-временными трансляциями $x^\mu \rightarrow x^\mu + \epsilon^\mu$. Например, если записать преобразование трансляции для глюонного поля B в виде $B_\alpha^\mu \rightarrow B_\alpha^\mu + (\epsilon_\alpha \partial^\alpha B_\alpha^\mu \equiv D^\mu \epsilon_\alpha B_\alpha^\mu + \epsilon_\alpha G_\alpha^{\alpha\mu})$, то первое слагаемое в скобках можно устранить калибровочным преобразованием, так что мы получим $B_\alpha^\mu \rightarrow B_\alpha^\mu + \epsilon_\alpha G_\alpha^{\alpha\mu}$.

заменить следующим выражением для дивергенции аксиального тока:

$$\partial_\mu A_{qq}^\mu(x) = i(m_q + m_{\bar{q}})\bar{q}(x)\gamma_5 q(x) + \frac{T_F g^2}{16\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} G_{\mu\nu}(x) G_{\rho\sigma}(x). \quad (10.6)$$

Это так называемая треугольная аномалия Адлера – Белла – Джакива, которая будет рассмотрена в § 33, 37 и 38.

Также легко вычислить *одновременные коммутационные соотношения* для аксиальных A или векторных V токов и полей. Используя преобразования (10.3), для свободных полей получаем

$$\begin{aligned} \delta(x^0 - y^0) [V_{qq}^0(x), q''(y)] &= -\delta(x - y) \delta_{qq} q'(x), \\ \delta(x^0 - y^0) [A_{qq}^0(x), q''(y)] &= -\delta(x - y) \delta_{qq} \gamma_5 q'(x) \quad \text{и т.д.} \end{aligned} \quad (10.7)$$

Векторные и аксиальные токи коммутируют с полями глюонов и \bar{d} духов. Одновременные коммутационные соотношения между аксиальными и векторными токами, построенными из свободных полей, проще всего записать, введя матрицы Гелл-Манна λ^α , действующие в цветовом пространстве (см. приложение В). Если рассматривать кварки трех ароматов ($f = 1, 2, 3$) и определить векторные и аксиальные токи в виде

$$V_\alpha^\mu(x) = \sum_{ff'} \bar{q}_f(x) \lambda_{ff'}^\alpha \gamma^\mu q_{f'}(x), \quad A_\alpha^\mu(x) = \sum_{ff'} \bar{q}_f(x) \lambda_{ff'}^\alpha \gamma^\mu \gamma_5 q_{f'}(x), \quad (10.8)$$

то возникают следующие коммутационные соотношения:

$$\begin{aligned} \delta(x^0 - y^0) [V_\alpha^0(x), V_\beta^\mu(y)] &= 2i\delta(x - y) \Sigma f_{\alpha\beta\delta} V_\delta^\mu(x), \\ \delta(x^0 - y^0) [V_\alpha^0(x), A_\beta^\mu(y)] &= 2i\delta(x - y) \Sigma f_{\alpha\beta\delta} A_\delta^\mu(x), \\ \delta(x^0 - y^0) [A_\alpha^0(x), A_\beta^\mu(y)] &= 2i\delta(x - y) \Sigma f_{\alpha\beta\delta} V_\delta^\mu(x) \quad \text{и т.д.} \end{aligned} \quad (10.9)$$

Соотношения (10.7) и (10.9) получены для токов, составленных из свободных кварковых полей. Однако благодаря наличию δ -функции в правых частях (10.7) и (10.9) они эффективны только для малых расстояний; следовательно, в квантовой хромодинамике из-за свойства асимптотической свободы они остаются справедливыми в таком виде даже при учете взаимодействий между полями кварков и глюонов.

Также легко вычислить одновременные коммутационные соотношения для сохраняющихся или квазисохраняющихся токов с гамильтонианом (или лагранжианом). Если ток J^μ сохраняется, то соответствующий ему заряд Q_J имеет вид

$$Q_J(t) = \int d\vec{x} J^0(t, \vec{x}), \quad t = x^0.$$

Он является интегралом движения и, следовательно, коммутирует с гамильтонианом:

$$[Q_J(t), \mathcal{H}(t, \vec{y})] = 0.$$

Здесь \mathcal{H} — гамильтониан (плотность функции Гамильтона системы); он связан с тензором энергии-импульса соотношением $\mathcal{H} = \Theta^{00}$. Обозначим массовый член, входящий в гамильтониан \mathcal{H} , через \mathcal{H}' :

$$\mathcal{H}' = \sum_q m_q \bar{q}q.$$

Тогда, если ток J является квазисохраняющимся, то справедливо соотношение

$$[Q_J(t), \mathcal{H}'(t, \vec{y})] = i\partial_\mu J^\mu(t, \vec{y}).$$

Конечно, заряд Q_J по-прежнему коммутирует с остальными членами гамильтониана \mathcal{H} .

§ 11. Ренормализационная группа

Рассмотрим, например, перенормировку кваркового пропагатора. В калибровке Ферми — Фейнмана в рамках μ -схемы

$$S_R^{(\mu)}(p; g, m) = i \frac{1 - (4/3)g^2 A_R^{(\mu)}(p^2)}{p - m \{1 - (4/3)g^2 B_R^{(\mu)}(p^2)\}}, \quad (11.1 \text{ а})$$

где

$$A_R^{(\mu)}(p^2) = \frac{2}{16\pi^2} \int_0^1 dx (1-x) \frac{xm^2 + x(1-x)\mu^2}{xm^2 - x(1-x)p^2},$$

$$B_R^{(\mu)}(p^2) = \frac{-2}{16\pi^2} \int_0^1 dx (1+x) \log \frac{xm^2 + x(1-x)\mu^2}{xm^2 - x(1-x)p^2}. \quad (11.1 \text{ б})$$

В рамках схемы \overline{MS} выражения для пропагатора S и функций A и B имеют вид

$$S_R^{(\nu)}(p; g, m) = i \frac{1 - (4/3)g^2 \bar{A}_R(p^2, \nu)}{p - m \{1 - (4/3)g^2 \bar{B}_R(p^2, \nu)\}},$$

$$\bar{A}_R = \frac{1}{16\pi^2} \left\{ -1 - 2 \int_0^1 dx (1-x) \log \frac{xm^2 - x(1-x)p^2}{\nu_0^2} \right\}; \quad (11.2 \text{ а})$$

$$\bar{B}_R = \frac{1}{16\pi^2} \left\{ 1 + 2 \int_0^1 dx (1+x) \log \frac{xm^2 - x(1-x)p^2}{\nu_0^2} \right\}. \quad (11.2 \text{ б})$$

Видно, что перенормировочная процедура вводит в функции Грина зависимость от произвольного параметра размерности массы: это точка нормировки μ^2 в μ -схеме или шкала масс ν^2 в схеме \overline{MS} .

Начнем с рассмотрения μ -схемы перенормировки. Предположим, что точка нормировки изменилась и вместо прежнего значения μ взято новое значение μ' . Если использовать лишь выражения (11.16), в которых параметр μ заменен на μ' , то выражение для кваркового пропагатора $S_R^{(\mu')}$ будет отличаться от прежнего. Но мы хотим построить теорию, которая была бы определена однозначно; следовательно, необходимо скомпенсировать изменение кваркового пропагатора. Этого можно добиться, если принять, что масса кварка тоже зависит от точки нормировки μ .

Поэтому перепишем выражение (11.1a) для пропагатора в виде

$$S_R^{(\mu)}(p; g, m(\mu)) = i \frac{1 - (4/3)g^2 A_R^{(\mu)}(p^2)}{p - m(\mu) \{1 - (4/3)g^2 B_R^{(\mu)}(p^2)\}}. \quad (11.3)$$

Существование зависимости массы кварка от точки нормировки очевидно из выражения для перенормированного пропагатора S_R , записанного через перенормированный пропагатор:

$$S_R^{(\mu)}(p; g, m(\mu)) = Z_F^{-1}(\mu) S_{uD}(p; g, m_{uD}); \\ m_{uD} = Z_m(\mu) m(\mu). \quad (11.4)$$

Поэтому для обеспечения независимости кваркового пропагатора от точки нормировки μ достаточно подходящим образом выбрать зависимости перенормировочных множителей Z_F и Z_m от этой точки. Другими словами, если известно выражение для пропагатора $S_R^{(\mu)}$ при $(p; g, m(\mu))$, то можно вычислить его значение и при $(p = \mu'; g, m(\mu'))$. После этого определим пропагатор $S_R^{(\mu')}$, нормированный в точке μ' , в виде

$$S_R^{(\mu')}(p; g, m(\mu')) = \frac{i}{p - m(\mu')}.$$

Потребовав равенства выражений для пропагаторов при $p = \mu'$, можно разделить функции $m(\mu')$ и $Z_F(\mu')/Z_F(\mu)$. В результате, например, получаем следующее выражение для функции $m(\mu')$:

$$m(\mu') = m(\mu) \left\{ 1 - \frac{2}{3} \frac{\alpha_g}{\pi} \int_0^1 dx (1+x) \log \frac{xm + x(1-x)\mu'^2}{xm + x(1-x)\mu^2} \right\}.$$

В рамках схемы \overline{MS} рассуждение оказывается более простым, но вместе с тем и более тонким¹⁾. После проведения регуляризации во всех вы-

¹⁾ Используемая здесь перенормировочная схема \overline{MS} несколько отличается от стандартной схемы \overline{MS} , хотя по существу полностью ей эквивалентна.

ражениях возникает произвольный параметр v_0 , имеющий размерность массы. Если мы хотим получить функции Грина, не зависящие от этого произвольного параметра v_0 , то этого можно добиться, отбросив в возникающих выражениях не только $(4\pi)^{\epsilon/2} \Gamma(\epsilon/2)$, а весь член $(4\pi)^{\epsilon/2} \Gamma(\epsilon/2) v_0^\epsilon$.

Единственный способ достичь этого состоит во введении нового параметра v размерности массы, так что теперь перенормировочный множитель Z заменяется на комбинацию $Z(v) = (v_0/v)^\epsilon Z$; которая сократится с множителем $N_\epsilon^{(1)} = 2/\epsilon - \gamma_E + \log 4\pi + \log v_0$. Перенормированные функции Грина будут зависеть от параметра v , но не будут уже зависеть от v_0 .

Предположим, что мы хотим изменить значение параметра v , но так, чтобы при этом не возникло физических эффектов. Для этого достаточно ввести зависимость от параметра v в константу связи g , массу кварка m и калибровочный параметр ξ (в дополнение к зависимости от v перенормировочного множителя Z). Для функции Грина Γ с отсеченными внешними линиями получаем

$$\Gamma_R(p_1, \dots, p_{N-1}; g(v), m(v), \xi(v); v) = Z_\Phi^{1/2}(v) \dots Z_{\Phi_N}^{1/2}(v) \Gamma_{uD}(p_1, \dots, p_{N-1}; g_{uD}, m_{uD}, \xi_{uD}); \quad (11.5)$$

$$g_{uD} = Z_g(v)g(v), \quad m_{uD} = Z_m(v)m(v), \\ \lambda_{uD} = Z_\lambda(v)\lambda(v), \quad \xi = 1 - \lambda^{-1}. \quad (11.6)$$

Легко видеть, какая требуется зависимость от параметра v . Напомним, что параметр v_0 входил во все выражения в комбинации

$$d^D \hat{k} = \frac{d^D k}{(2\pi)^D} v_0^{4-D},$$

так что зависимость от v_0 имеется только в расходящихся частях интегралов

$$\Gamma(2/\epsilon)(4\pi)^{\epsilon/2}(v_0^2)^{\epsilon/2}.$$

Следовательно, все перенормировочные множители $Z(v)$ имеют вид

$$Z_j(v) = 1 + C_j^{(1)}(v) \frac{g^2}{16\pi^2} + \dots, \quad (11.7 \text{ а})$$

$$C_j^{(1)}(v) = c_j^{(1)} \left\{ \frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \log 4\pi + \log \frac{v_0^2}{v^2} \right\}. \quad (11.7 \text{ б})$$

Коэффициенты перед членом $\log v^2$ с точностью до знака совпадают с ранее вычисленными коэффициентами $c_j^{(1)}$. В низших порядках теории возмущений легко показать, что в μ -схеме перенормировки это утверждение справедливо и в отношении коэффициентов перед членом $\log \mu^2$.

Преобразования вида $\mu \rightarrow \mu'$ (или $\nu \rightarrow \nu'$) образуют *ренормализационную группу*¹⁾, впервые введенную в рассмотрение Штюкельбергом и Петерманом [237] (см. также [45, 140]). Инвариантность физических величин по отношению к этой группе преобразований можно использовать (см. § 20) для изучения асимптотического поведения функций Грина. Эффективнее всего это можно сделать, используя уравнение, полученное Калланом [59] и Симанзиком [239], которое рассматривается в следующем параграфе.

§ 12. Уравнение Каллана — Симанзика

Уравнение Каллана — Симанзика (КС) проще всего получить, заметив, что перенормированные величины Γ_u , g_u , m_u , ξ_u не зависят от значения параметра ν (скажем, в перенормированной схеме \overline{MS}). Исходя из этого, на основании формул (11.5) и (11.6) немедленно получаем уравнение

$$\frac{\nu d}{d\nu} \Gamma_{uD}(p_1, \dots, p_{N-1}; g_{uD}, m_{uD}, \lambda_{uD}) = 0,$$

т.е.

$$\left\{ \frac{\nu \partial}{\partial \nu} + g\beta \frac{\partial}{\partial g} + (1 - \xi)\lambda\delta \frac{\partial}{\partial \lambda} + \sum_q m_q \gamma_{m,q} \frac{\partial}{\partial m_q} - \gamma_\Gamma \right\} \times \Gamma_R(p_1, \dots, p_{N-1}; g(\nu), m(\nu), \lambda(\nu); \nu) = 0. \quad (12.1)$$

Здесь введены универсальные функции β , γ_k и δ , определяемые соотношениями

$$\begin{aligned} \nu \frac{d}{d\nu} g(\nu) &= g(\nu)\beta, \\ \nu \frac{d}{d\nu} m_q(\nu) &= m_q(\nu)\gamma_{m,q}, \\ \nu \frac{d}{d\nu} \lambda(\nu) &= \{1 - \lambda(\nu)\}\delta, \end{aligned} \quad (12.2)$$

и

$$Z_\Gamma^{-1} = Z_{\Phi_1}^{1/2} \dots Z_{\Phi_N}^{1/2}, \quad Z_\Gamma^{-1} \nu \frac{d}{d\nu} Z_\Gamma = \gamma_\Gamma. \quad (12.3)$$

Функции β , γ и δ можно вычислить, если использовать уравнение (9.10) и учесть, что величины g_u , m_u и ξ_u не зависят от параметра ν :

$$\beta = -Z_g^{-1}(\nu) \nu \frac{d}{d\nu} Z_g(\nu), \quad \gamma_{m,q} = -Z_m^{-1}(\nu) \nu \frac{d}{d\nu} Z_m(\nu), \quad \delta = -Z_\lambda^{-1}(\nu) \nu \frac{d}{d\nu} Z_\lambda^{-1}(\nu). \quad (12.4)$$

¹⁾ В действительности групповая структура возникает только в рамках заданной перенормировочной схемы. Если включить в рассмотрение преобразования вида $T(R_1 \rightarrow R)$, изменяющиеся при переходе от одной схемы к другой, то в результате возникает расслоенное пространство.

Уравнение (12.1) в приведенном выше виде неудобно, так как содержит частную производную по параметру $\nu \partial / \partial \nu$. Но его можно представить в более удобной форме, если использовать соображения размерности. Предположим, что размерность величины Γ_R равна ρ_Γ ; тогда величина $\nu^{-\rho_\Gamma} \Gamma_R$ является безразмерной¹⁾, поэтому она может зависеть только от безразмерных отношений размерных параметров. Изменим масштаб импульсов, являющихся аргументами функции Грина, в λ раз: $p_i \rightarrow \lambda p_i$. В результате получим

$$\begin{aligned} & \nu^{-\rho_\Gamma} \Gamma_R(\lambda p_1, \dots, \lambda p_{N-1}; g, m, a^{-1}; \nu) \\ &= F(\lambda p_1 / \nu, \dots, \lambda p_{N-1} / \nu; g, m / \nu, a^{-1}). \end{aligned}$$

Чтобы отличать масштаб изменения импульсов λ от калибровочного параметра, последний обозначим через $a = \lambda^{-1}$. Теперь, заменяя частную производную $\nu \partial / \partial \nu$ на производную $-\lambda \partial / \partial \lambda$, получаем уравнение Каллана – Симанзика

$$\begin{aligned} & \left\{ -\frac{\partial}{\partial \log \lambda} + g\beta \frac{\partial}{\partial g} + (a^{-1})\delta \frac{\partial}{\partial a^{-1}} + \sum_q m_q(\gamma_{m,q} - 1) \frac{\partial}{\partial m_q} + \rho_\Gamma - \gamma_\Gamma \right\} \\ & \times \Gamma_R(\lambda p_1, \dots, \lambda p_{N-1}; g, m, \xi; \nu) = 0. \end{aligned} \quad (12.5)$$

Чтобы решить это уравнение, введем эффективные, или "бегущие", параметры, определяемые соотношениями

$$\frac{d\bar{g}(\lambda)}{d \log \lambda} = \bar{g}(\lambda) \beta(\bar{g}(\lambda)), \quad \frac{d\bar{m}(\lambda)}{d \log \lambda} = \bar{m}(\lambda) \gamma_{m,q}, \quad \frac{d\bar{a}(\lambda)^{-1}}{d \log \lambda} = \bar{a}^{-1} \delta, \quad (12.6 \text{ а})$$

и удовлетворяющие граничным условиям

$$\bar{g}|_{\lambda=1} = g(\nu), \quad \bar{m}|_{\lambda=1} = m(\nu), \quad \bar{a}|_{\lambda=1} = a(\nu). \quad (12.6 \text{ б})$$

Тогда решение уравнения Каллана – Симанзика можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \Gamma_R(\lambda p_1, \dots, \lambda p_{N-1}; g(\nu), m(\nu), \xi(\nu); \nu) \\ &= \lambda^{\rho_\Gamma} \Gamma_R(p_1, \dots, p_{N-1}; \bar{g}(\lambda), \bar{m}(\lambda), \bar{a}(\lambda)^{-1}; \nu) \\ & \times \exp \left\{ - \int_0^{\log \lambda} d \log \lambda' \gamma_\Gamma(\bar{g}(\lambda'), \bar{m}(\lambda'), \bar{a}(\lambda')^{-1}) \right\}. \end{aligned} \quad (12.7)$$

¹⁾ Размерность полей, входящих в определение функции Грина, легко вычислить, если учесть, что действие $\mathcal{Q} = \int d^4 x \mathcal{L}(x)$ безразмерно. Отсюда следует, что размерность кварковых полей $[q] = [M]^{3/2}$, полей духов $[\omega] = [M]$, глюонных полей $[B] = [M]$. Размерность же функции Грина выражается через размерности полей, фигурирующих в ее определении. Например, размерность фермионного пропагатора $\rho_S = -1$ (слагаемые $3/2 + 3/2$ возникают из размерностей полей кварков, а 4 — из элемента объема четырехмерного пространства $d^4 x$).

Из этого выражения видно, что при изменении импульсов в λ раз функция Грина Γ_R не умножается просто на величину λ^{p_Γ} как этого следовало ожидать из размерного анализа, а приобретает дополнительный множитель (экспоненту, стоящую в правой части (12.7)). Именно поэтому величину γ_Γ обычно называют *аномальной размерностью* функции Грина Γ_R . С этой точки зрения ренормализационную группу можно интерпретировать как способ обеспечения масштабной инвариантности в квантовой теории калибровочных полей¹⁾. Масштабная инвариантность таких теорий нетривиальна ввиду бесконечного характера проводимых перенормировок, в ходе которых вводится внешний по отношению к задаче масштаб масс.

Следует отметить, что выражение (12.7) справедливо всегда безотносительно к теории возмущений; однако на практике для получения реальных результатов необходимо использовать теорию возмущений.

§ 13. Перенормировка составных операторов

Для изучения структуры адронов используют внешние электромагнитные и слабые токи, поэтому необходимо рассмотреть не только функции Грина, но и матричные элементы различных составных операторов. Эти операторы можно разбить на две группы: сохраняющихся или частично сохраняющихся операторов и несохраняющихся операторов.

Сохраняющимся является, например, оператор электромагнитного тока $J_{em}^\mu = \sum Q_q V_q^\mu$, где проводится суммирование по всем ароматам кварков, а операторы V_q^μ имеют следующий вид:

$$V_q^\mu(x) = :\bar{q}(x)\gamma^\mu q(x):;$$

и во всех порядках теории возмущений удовлетворяют условиям сохранения

$$\partial_\mu V_q^\mu(x) = 0. \quad (13.1 \text{ а})$$

В качестве примера частично сохраняющегося тока можно привести слабый аксиальный ток

$$A_{qq'}^\mu(x) = :\bar{q}(x)\gamma^\mu\gamma_5 q'(x):.$$

Используя уравнения движения (3.6), легко убедиться, что аксиальный ток удовлетворяет соотношениям

$$\partial_\mu A_{qq'}^\mu(x) = i(m_q + m_{q'})J_{qq'}^5(x), \quad J_{qq'}^5(x) = :\bar{q}(x)\gamma_5 q'(x):, \quad (13.1 \text{ б})$$

из которых видно, что в пределе больших энергий, когда можно пренебречь массами кварков, он является сохраняющимся.

¹⁾ Такой подход к вопросу о ренормализационной группе развит в работах [60, 74].

Вообще говоря, матричные элементы любого составного оператора представляют собой расходящиеся величины. Но если учесть контрчлены, входящие в лагранжиан КХД, то матричные элементы сохраняющихся и частично сохраняющихся токов оказываются конечными¹⁾. Физически это очевидно, формальное же доказательство этого утверждения будет приведено ниже.

Несохраняющиеся операторы, как правило, требуют проведения перенормировки. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим в качестве простого примера оператор $\bar{\Sigma}_i : \bar{q}^i(x) q^i(x) : \equiv M(x)$. Как уже обсуждалось в § 8 и 9, можно работать либо с неперенормированной величиной $\bar{q}_u q_u$ и проводить вычисления, учитывая контрчлены, либо использовать перенормированную величину $Z_F^{-1} \bar{q}_u q_u$, проводя подстановки $g \rightarrow g_u = Z_g g$ для константы связи и $m_u \rightarrow m = Z_m m$ для массы и пренебрегая контрчленами. Тем не менее, вообще говоря, этого оказывается недостаточно, чтобы величина M была конечной. Для того чтобы получить конечные выражения для матричных элементов оператора M , необходимо умножить его на дополнительный множитель Z_M , называемый *перенормировочным множителем оператора*:

$$M_R(x) = Z_M M(x). \quad (13.2)$$

Чтобы доказать это утверждение, используем формулы § 3. При этом поля, отмеченные верхним или нижним индексом 0, являются свободными, например $q_0 \equiv q_u^0$ или $B_0 \equiv B_u^0$. В терминах свободных полей оператор M_R записывается в виде

$$M_R(x) = Z_M T : \bar{q}_0(x) q_0(x) : \exp i \int d^4 z \mathcal{L}_{\text{int}}^0(z).$$

В низшем порядке теории возмущений по константе связи g это выражение принимает вид

$$\begin{aligned} M_R(x) = Z_M Z_F^{-1} : \bar{q}_0(x) q_0(x) : \\ - \frac{g^2}{2!} Z_M \sum \int d^4 z_1 d^4 z_2 T : \bar{q}_0(x) q_0(x) : : \bar{q}_0(z_1) t^a \gamma_\mu q_0(z_1) : \\ \times : \bar{q}_0(z_2) t^b \gamma_\nu q_0(z_2) : B_{0a}^\mu(z_1) B_{0b}^\nu(z_2). \end{aligned} \quad (13.3)$$

Поскольку перенормировочный множитель оператора имеет вид $Z_M = 1 + O(g^2)$, множителем Z_M во втором слагаемом правой части (13.3) можно прене-

¹⁾ Отметим, что мы работаем в низшем порядке теории возмущений по слабому и электромагнитному взаимодействиям. В противном случае возникает необходимость включения в формулы слабых и электромагнитных перенормировочных множителей Z_F^w , Z_F^{em} и т.д.

бредь. Рассмотрим далее расходящиеся матричные элементы, а именно матричные элементы M_R по кварковым состояниям с равным импульсом p ; нетрудно видеть, что характер расходимости в рассматриваемом примере одинаков как для диагональных, так и для недиагональных матричных элементов. Обозначим диагональные матричные элементы операторов M и M_R соответственно через $\langle M \rangle_p$ и $\langle M_R \rangle_p$. Тогда в калибровке Ферми – Фейнмана после простых вычислений из выражения (13.3) для этих матричных элементов получим

$$\langle M_R \rangle_p = Z_M Z_F^{-1} \langle M_0 \rangle_p + i \langle M_0 \rangle_p \left\{ g^2 C_F \int d^D \hat{k} \frac{-\gamma^\mu (p+k)(p+k) \gamma_\mu}{k^2 (p+k)^4} + S_u(p) + S_u(p) \right\},$$

где (13.4)

$$M_0 \equiv : \bar{q}_0 q_0 :$$

Соответствующие фейнмановские диаграммы приведены на рис. 9. Первое слагаемое правой части (13.4) соответствует диаграмме рис. 9, а, два последних слагаемых – диаграмме рис. 9, б, а интеграл соответствует диаграмме рис. 9, в. Вычисления проведены в приближении безмассовых кварков. Легко убедиться в том, что пренебрежение массой кварков не влияет на характер расходимостей. Очевидно, что расходящаяся часть одного из кварковых пропагаторов S_u в правой части (13.4) точно сокращается с фермионным перенормировочным множителем Z_F ; таким образом, остается только расходимость, связанная с интегралом:

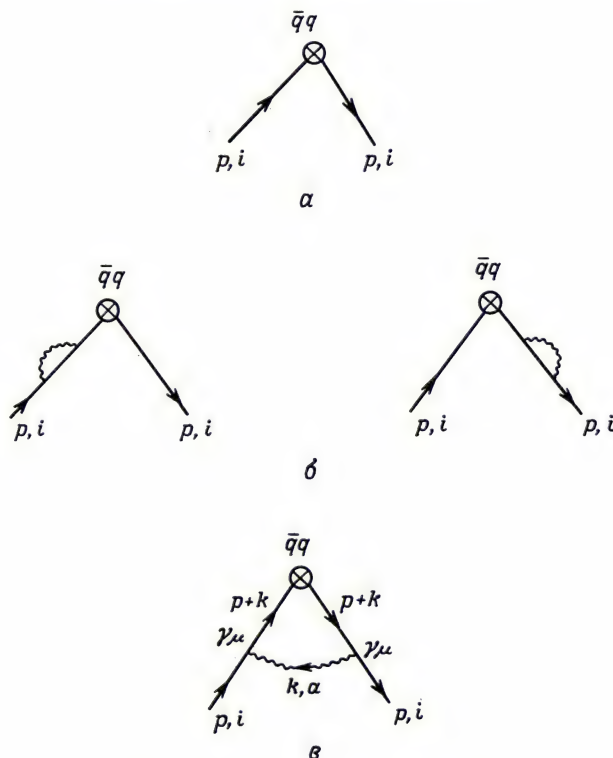
$$-i C_F g^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} v_0^{4-D} \frac{\gamma^\mu \gamma_\mu}{k^2 (p+k)^2} \stackrel{\text{div}}{=} \frac{4g^2 C_F}{16\pi^2} \Gamma(\epsilon/2) (4\pi)^{\epsilon/2} v_0^\epsilon.$$

Добавляя вклад от расходимости, обусловленной вторым кварковым пропагатором S_u , получаем

$$Z_M(v) = 1 - \frac{3C_F \alpha_g}{4\pi} \left\{ \frac{2}{\epsilon} + \log 4\pi - \gamma_E - \log v^2/v_0^2 \right\}. \quad (13.5)$$

Вычисление перенормировочного множителя Z_M проведено в калибровке Ферми – Фейнмана, но нетрудно убедиться, что он является величиной, не зависящей от калибровки.

Если бы мы провели вычисления не для величины $\bar{q}q$, а, скажем, для величин $\bar{q}\gamma^\mu q$ или $\bar{q}\gamma^\mu \gamma_5 q$, то получили бы, что аномальные размерности этих операторов равны нулю. Как уже говорилось, это утверждение является частным случаем общего результата, к доказательству которого мы


 Рис. 9. Перенормировка оператора $\bar{q}q$.

переходим. Пусть ток J^μ представляет собой квазисохраняющийся оператор, т.е. в пределе, когда массы частиц стремятся к нулю, он удовлетворяет условию $\partial_\mu J^\mu(x) = 0$. Рассмотрим какое-нибудь хронологическое произведение произвольных полей Φ_i и тока J^μ

$$TJ^\mu(x)\Phi_1(y_1)\dots\Phi_N(y_N).$$

Тогда, используя соотношение $\partial_0\theta(x^0 - y^0) = \delta(x^0 - y^0)$, можно получить тождество Уорда

$$\begin{aligned} \partial_\mu TJ^\mu(x)\Phi_1(y_1)\dots\Phi_N(y_N) \\ = T(\partial_\mu J^\mu(x))\Phi_1(y_1)\dots\Phi_N(y_N) \\ + \sum_{k=1}^N \delta(x^0 - y_k^0) T\Phi_1(y_1)\dots[J^0(x), \Phi_k(y_k)]\dots\Phi_N(y_N). \end{aligned} \quad (13.6)$$

Пусть справедливо равенство

$$\delta(x^0 - y_k^0) [J^0(x), \Phi_k(y_k)] = \Phi'_k(y_k) \delta(x - y_k);$$

тогда, если множители Z_J и Z_D представляют собой аномальные размерности тока J^μ и его дивергенции $\partial_\mu J^\mu$ соответственно, а множители γ_J и γ_D являются коэффициентами перед членом $-(g^2/16\pi^2) N_\epsilon$ в выражениях для Z_J и Z_D , то, применяя к левой и правой частям (13.6) оператор $\nu d./d\nu$, получаем

$$\begin{aligned} & \gamma_J \partial_\mu T J^\mu(x) \Phi_1(y_1) \dots \Phi_N(y_N) \\ &= T \left\{ \sum \gamma_m m \frac{\partial}{\partial m} \partial_\mu J^\mu(x) \right\} \Phi_1(y_1) \dots \Phi_N(y_N) \\ &+ \gamma_D T(\partial_\mu J^\mu(x)) \Phi_1(y_1) \dots \Phi_N(y_N). \end{aligned} \quad (13.7)$$

Уравнение (13.7) может выполняться только в том случае, если $\gamma_J = 0$, а множители γ_D и γ_m удовлетворяют условию

$$\gamma_D \partial_\mu J^\mu = - \sum \gamma_m m \frac{\partial}{\partial m} \partial_\mu J^\mu. \quad (13.8)$$

Уравнение (13.8) можно проверить для частного случая, когда ток J^μ записывается в виде $J^\mu = \bar{q} \gamma^\mu q$. При этом используем полученное выше выражение для дивергенции тока

$$\partial_\mu J^\mu = i(m - m') \bar{q} q,$$

а также явный вид аномальной размерности γ_m , которая вычислена в § 14. Или же можно учесть соотношения (9.17) и (11.6), чтобы убедиться в том, что во втором порядке теории возмущений выполняются равенства

$$m_{uD}(\bar{q}q)_{uD} = m_R Z_m(\bar{q}q)_{uD} = M_R Z_M(\bar{q}q)_{uD} = M_R(\bar{q}q)_R,$$

с перенормировочным множителем Z_m , равным только что вычисленному множителю Z_M .

§ 14. Бегущая константа связи и бегущая масса в КХД; асимптотическая свобода

Вернемся к уравнениям (12.6) и (12.7). Чтобы решить уравнение (12.6), предположим, что при некотором значении параметра ν перенормированная константа связи достаточно мала для того, чтобы функции β , γ , δ можно было

разложить в ряд по степеням константы связи $g(v)$:

$$\left. \begin{aligned} \beta &= - \left\{ \beta_0 \frac{g^2(v)}{16\pi^2} + \beta_1 \left(\frac{g^2(v)}{16\pi^2} \right)^2 + \beta_2 \left(\frac{g^2(v)}{16\pi^2} \right)^3 + \dots \right\}, \\ \gamma_m &= \gamma_m^{(0)} \frac{g^2(v)}{16\pi^2} + \gamma_m^{(1)} \left(\frac{g^2(v)}{16\pi^2} \right)^2 + \dots, \\ \delta &= \delta^{(0)} \frac{g^2(v)}{16\pi^2} + \delta^{(1)} \left(\frac{g^2(v)}{16\pi^2} \right)^2 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (14.1)$$

Значение коэффициента β_0 можно получить из выражений (9.30) и (12.4):

$$\beta_0 = \frac{1}{3} \{ 11C_A - 4n_f T_F \} = \frac{1}{3} (33 - 2n_f). \quad (14.2 \text{ а})$$

Используя результат вычислений перенормировочного множителя Z_g во втором [64, 179] и в третьем [241] порядках теории возмущений, для коэффициентов β_1 и β_2 получаем следующие выражения¹⁾:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{34}{3} C_A^2 - \frac{20}{3} C_A T_F n_f - 4 C_F T_F n_f = 102 - \frac{38}{3} n_f; \\ \beta_2 &= \frac{2857}{54} C_A^3 - \frac{1415}{27} C_A^2 T_F n_f \\ &\quad + \frac{158}{27} C_A T_F^2 n_f^2 - \frac{205}{9} C_A C_F T_F n_f + \frac{44}{9} C_F T_F^2 n_f^2 + 2 C_F^2 T_F n_f \\ &= \frac{2857}{2} - \frac{5033}{18} n_f + \frac{325}{54} n_f^2. \end{aligned} \quad (14.2 \text{ б})$$

Вычислим эффективную константу \bar{g} в низшем порядке теории возмущений. Введем стандартное обозначение $\alpha_s \equiv \bar{g}^2/4\pi$. Уравнение (12.6а) в низшем порядке теории возмущений имеет вид

$$\frac{d\bar{g}}{d \log \lambda} = -\beta_0 \frac{\bar{g}^3}{16\pi^2},$$

и при $\lambda^2 = Q^2/v^2$ приводит к следующему результату для эффективной константы связи:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_s(v)}^{\alpha_s(Q^2)} \frac{d\alpha_s}{\alpha_s^2} &= \frac{-\beta_0}{2\pi} \int_0^{(1/2) \log Q^2/v^2} d \log \lambda', \\ \alpha_s(Q^2) &= \frac{\alpha_s(v)}{1 + \alpha_s(v) \beta_0 (\log Q^2/v^2)/4\pi}. \end{aligned} \quad (14.3)$$

¹⁾ Значения коэффициентов β_0 и β_1 не зависят от перенормировочной схемы; выражение для коэффициента β_2 выписано для случая схемы \overline{MS} .

Последнее выражение удобно записать через инвариантный параметр Λ , выбирая его таким образом, чтобы оно приняло вид

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{4\pi}{\beta_0 \log Q^2/\Lambda^2}; \quad \Lambda^2 = \nu^2 e^{-4\pi/\beta_0 \alpha_s(\nu)}. \quad (14.4 \text{ а})$$

Подставляя выражение для коэффициента β_0 , получаем следующую формулу, описывающую зависимость константы связи α_s от переданного 4-импульса Q :

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{12\pi}{(33 - 2n_f) \log Q^2/\Lambda^2}. \quad (14.4 \text{ б})$$

Если учесть члены второго порядка малости по константе связи α_s в разложении для ренормгрупповой β -функции (член $\sim (g^2(\nu)/16\pi^2)^2$ в (14.1)), то для бегущей константы связи получим

$$\alpha_s^{(2)}(Q^2) = \frac{12\pi}{(33 - 2n_f) \log Q^2/\Lambda^2} \left\{ 1 - 3 \frac{153 - 19n_f}{(33 - 2n_f)^2} \cdot \frac{\log \log Q^2/\Lambda^2}{\frac{1}{2} \log Q^2/\Lambda^2} \right\}. \quad (14.4 \text{ в})$$

Мы видим, что $\alpha_s^{(2)}(Q^2)/\alpha_s(Q^2) \rightarrow 1$ и оба выражения (14.4б) и (14.4в) логарифмически стремятся к нулю в пределе $Q^2 \rightarrow \infty$ ¹⁾. В этом и состоит проявление замечательного свойства квантовой хромодинамики — явления *асимптотической свободы*, которое впервые обсуждалось в работах Гросса и Вильчека [160] и Политцера [218]. С учетом выражения (12.7) оно означает, что при больших пространственноподобных импульсах $\lambda p_i \sim q$, $q^2 = -Q^2$ квантовая хромодинамика представляет собой свободную квантово-полевую теорию с точностью до логарифмических поправок. Более того, в пределе $Q^2 \rightarrow \infty$ константа связи $\alpha_s \rightarrow 0$. Следовательно, эти поправки можно вычислить в виде ряда теории возмущений по малой константе связи α_s .

Можно также вычислить бегущую массу. В низшем порядке теории возмущений потребуем выполнения соотношений (12.2), (12.6) и (9.14). Тогда получим

$$\frac{1}{\bar{m}} \cdot \frac{d\bar{m}}{d \log \lambda} = \gamma_m^{(0)} \frac{g^2}{16\pi^2} = \frac{\gamma_m^{(0)}}{2\beta_0 \log \lambda}.$$

¹⁾ При условии, что число ароматов $n_f < 16$. Это ограничение достаточно слабое и легко выполнимое. Экспериментально пока обнаружены кварки пяти ароматов. Современная теория предсказывает существование шестого, так называемого t -кварка. (Указания на экспериментальное обнаружение t -кварка получены в анализе адронных струй на $p\bar{p}$ -коллайдере. — Прим. перев.)

Используя выражение (14.4а), полагая $\log Q^2/\Lambda^2 = 2 \log \lambda$ и вводя константу интегрирования \hat{m} (которая представляет собой аналог параметра Λ), получаем выражение для эффективной массы

$$\bar{m}(Q^2) = \frac{\hat{m}}{(\frac{1}{2} \log Q^2/\Lambda^2)^{-\gamma_m^{(0)}/\beta_0}}, \quad \gamma_m^{(0)} = -3C_F. \quad (14.5 \text{ а})$$

Подставляя значения коэффициентов β_0 и γ_m , окончательно имеем

$$\bar{m}(Q^2) = \frac{\hat{m}}{(\frac{1}{2} \log Q^2/\Lambda^2)^{d_m}}, \quad d_m = \frac{12}{33 - 2n_f}, \quad (14.5 \text{ б})$$

где коэффициент d_m иногда называют *аномальной размерностью* массы.

Аналогично можно вычислить бегущий калибровочный параметр. Подробное вычисление можно найти в работе [209]. Приведем лишь результат

$$\xi(Q^2) = 1 - \frac{1}{\hat{\lambda}(\frac{1}{2} \log Q^2/\Lambda^2)^{d_\xi}} \left\{ 1 + \frac{9}{39 - 4n_f} \cdot \frac{1}{\hat{\lambda}(\log Q^2/\Lambda^2)^{d_\xi}} \right\}^{-1},$$

$$d_\xi = \frac{1}{2} \cdot \frac{39 - 4n_f}{33 - 2n_f}.$$

В заключение этого параграфа приведем результат вычисления эффективной массы \bar{m} в двухпетлевом приближении [242]:

$$\bar{m}^{(2)}(Q^2) = \frac{\hat{m}}{(\frac{1}{2} \log Q^2/\Lambda^2)^{d_m}} \left\{ 1 - \frac{\gamma_m^{(0)}\beta_1}{\beta_0^2} \cdot \frac{\log \log Q^2/\Lambda^2}{2 \log Q^2/\Lambda^2} + \frac{1}{2\beta_0^2} \left(\gamma_m^{(1)} - \gamma_m^{(0)} \frac{\beta_1}{\beta_0} \right) \frac{1}{\log Q^2/\Lambda^2} \right\}, \quad (14.5 \text{ в})$$

$$\gamma_m^{(1)} = 3 \left(\frac{n_c^2 - 1}{2n_c} \right)^2 + \frac{97}{6} \cdot \frac{n_c^2 - 1}{4} - \frac{5n_f(n_c^2 - 1)}{3n_c},$$

где $n_c = 3$ (число цветов). В качестве примера использования развитой здесь техники приведем вывод импульсной зависимости кваркового пропагатора в пределе больших импульсов $Q^2 \gg \Lambda^2$

$$S_R(p, q(\nu), m(\nu), \xi(\nu); \nu), \quad p^2 = -Q^2 \gg \Lambda^2.$$

Размерность кваркового пропагатора S_R равна $\rho_S = -1$. Следовательно, замечая, что $Z = Z_F$ (в пропагаторе S_R *сохранены внешние линии*: "усечен-

ный" пропагатор S_R был бы просто равен S_R^{-1} , при условии $\dot{p} = \lambda n$, $n^2 = -\Lambda^2$ из уравнения (12.7) получаем

$$S_R(p, g(\nu), m(\nu), \xi(\nu); \nu) = S_R(n, \bar{g}(\lambda), \bar{m}(\lambda), \bar{\xi}(\lambda); \nu) \left(\frac{Q^2}{\Lambda^2} \right)^{-1/2} \\ \times \exp \left\{ - \int_0^{\log Q/\Lambda} d \log \lambda' \frac{1-\xi}{3\pi} \alpha_g(\lambda') \right\}.$$

В ведущем приближении по α_s выражение для кваркового пропагатора принимает вид

$$S_R(n, \bar{g}(\lambda), \bar{m}(\lambda), \bar{\xi}(\lambda); \nu) \underset{Q^2 \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{i}{n}.$$

Используя формулу (14.4а), окончательно получаем

$$S_R(p, g(\nu), m(\nu), \xi(\nu); \nu) \underset{Q^2 \gg \Lambda^2}{\simeq} \frac{i}{p} \cdot \frac{1}{(\frac{1}{2} \log Q^2 / \Lambda^2)^{d_{F\xi}}}, \quad (14.6 \text{ а})$$

($Q^2 = -p^2$), где аномальная размерность кваркового поля записывается в виде

$$d_{F\xi} = \frac{3}{2} \cdot \frac{(1-\xi)C_F}{11C_A - 4T_F n_f} = 2 \frac{1-\xi}{33-2n_f}. \quad (14.6 \text{ б})$$

Таким образом, кварковый пропагатор S_R в пределе больших импульсов с точностью до логарифмических поправок $(\log Q/\Lambda)^{-d_{F\xi}}$ ведет себя аналогично пропагатору свободного кваркового поля. Отметим, что аномальная размерность кваркового поля $d_{F\xi}$, как и ожидалось, зависит от калибровочного параметра и равна нулю в калибровке Ландау, в которой кварковый пропагатор имеет каноническую размерность.

Глава III

ПРОЦЕССЫ ГЛУБОКОНЕУПРУГОГО РАССЕЯНИЯ

§ 15. e^+e^- -аннигиляция в адроны

Лагранжиан, описывающий сильное и электромагнитное взаимодействия кварков, можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{QCD+em}} = \sum_q \{ i\bar{q} \not{D} q - m_q \bar{q} q \} - \frac{1}{4} (D \times B)^2 \\ + e \sum_q Q_q \bar{q} \gamma_\mu q A^\mu - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (15.1)$$

где Q_q — заряд кварка q в единицах заряда протона e . В формуле (15.1) опущены члены, фиксирующие калибровку и описывающие вклад духов. Электромагнитный ток кварков равен

$$J^\mu = \sum_q Q_q : \bar{q} \gamma^\mu q :.$$

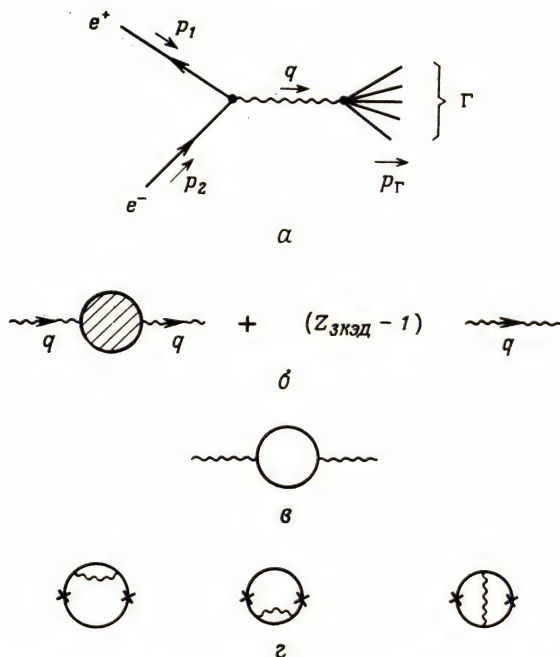
Рассмотрим некоторое адронное состояние Γ . Сечение аннигиляции неполяризованных электрона e^- и позитрона e^+ в адроны определяется как усредненная по спинам начальных электрона и позитрона сумма по всем возможным конечным состояниям адронной системы, возникающей в результате процесса $e^+e^- \rightarrow \Gamma$. Для того чтобы вычислить эту сумму, рассмотрим матричный элемент

$$\begin{aligned} \langle \Gamma | S_{\text{QCD+em}} | e^+ e^- \rangle \\ = \langle \Gamma | T \exp i \int d^4x \{ \mathcal{L}_{\text{int, QCD}}(x) + \mathcal{L}_{\text{int, em}}(x) \} | e^+ e^- \rangle. \end{aligned}$$

Проводя вычисления в низшем порядке теории возмущений по константе электромагнитного взаимодействия, получаем

$$\begin{aligned} \langle \Gamma | S_{\text{QCD+em}} | e^+ e^- \rangle = \frac{-e^2}{2!} \langle \Gamma | \int d^4x_1 d^4x_2 T \mathcal{L}_{\text{int, em}}^0(x_1) \mathcal{L}_{\text{int, em}}^0(x_2) \\ \times \exp i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{int, QCD}}^0(x) | e^+ e^- \rangle. \end{aligned}$$

Используя правила диаграммной техники Фейнмана для квантовой электродинамики и учитывая обозначения рис. 10, а, амплитуду интересующего нас

Рис. 10. Диаграммы, описывающие процесс $e^+e^- \rightarrow \text{адроны}$.

процесса можно выразить в форме

$$F(e^+e^- \rightarrow \Gamma) = \frac{2\pi e^2}{q^2} \bar{v}(p_1, \sigma_1) \gamma_\mu u(p_2, \sigma_2) \langle \Gamma | J^\mu(0) | 0 \rangle.$$

Суммируя по конечным адронным состояниям, для сечения e^+e^- -аннигиляции в адроны получаем

$$\begin{aligned} \sigma_h(s) &= \sum_{\Gamma} \sigma(e^+e^- \rightarrow \Gamma, s = (p_1 + p_2)^2) \\ &= \frac{2\alpha^2}{s^3} 4\pi^2 l_{\mu\nu} \sum_{\Gamma} (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - p_{\Gamma}) \langle \Gamma | J^\nu(0) | 0 \rangle \langle \Gamma | J^\mu(0) | 0 \rangle^*. \end{aligned} \quad (15.2)$$

Если пренебречь массой электрона, то тензор $l_{\mu\nu}$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} l_{\mu\nu} &= \frac{1}{4} \sum_{\sigma_1 \sigma_2} \bar{v}(p_1, \sigma_1) \gamma_\mu u(p_2, \sigma_2) [\bar{v}(p_1, \sigma_1) \gamma_\nu u(p_2, \sigma_2)]^* \\ &= \frac{1}{2} \{ q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu} - (p_1 - p_2)_\mu (p_1 - p_2)_\nu \}. \end{aligned}$$

Из приведенных формул видно, что нетривиальная часть выражения для сечения e^+e^- -аннигиляции в адроны связана с тензором

$$\Delta^{\mu\nu} = \sum_{\Gamma} (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - p_{\Gamma}) \langle 0 | J^{\mu}(0) | \Gamma \rangle \langle \Gamma | J^{\nu}(0) | 0 \rangle.$$

Используя полноту адронных состояний, в силу которой справедливо соотношение $\sum_{\Gamma} |\Gamma\rangle \langle \Gamma| = 1$, выражение для тензора $\Delta^{\mu\nu}$ можно переписать в виде

$$\Delta^{\mu\nu} = \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle [J^{\mu}(x), J^{\nu}(0)] \rangle_0. \quad (15.3)$$

При выводе этой формулы использован закон сохранения энергии-импульса, благодаря которому слагаемые, отвечающие переставленным токам J , равны нулю. Удобно определить тензор $\Pi^{\mu\nu}$ выражением

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = i \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle T J^{\mu}(x) J^{\nu}(0) \rangle_0, \quad (15.4 \text{ а})$$

где $p_1 + p_2 = q$; нетрудно убедиться в справедливости соотношения $\Delta^{\mu\nu} = 2 \text{Im} \Pi^{\mu\nu}$ ¹⁾: сечение e^+e^- -аннигиляции в адроны связано с мнимой частью фотонного поляризационного оператора.

Небольшие усложнения возникают из-за интерференции сильных и электромагнитных взаимодействий. Поскольку поляризационный оператор $\Pi^{\mu\nu}$ вычисляется во втором порядке теории возмущений по константе электромагнитного взаимодействия e , необходимо учитывать перенормировку электрического заряда, описываемую двумя диаграммами рис. 10, б. Простейшее решение этого вопроса заключается в рассмотрении тесно связанной с наблюдаемыми характеристиками процесса мнимой части поляризационного оператора $\text{Im} \Pi^{\mu\nu}$, для которой подобных усложнений не возникает.

Электромагнитные токи являются сохраняющимися, поэтому их аномальные размерности равны нулю. Если из выражения для поляризационного оператора $\Pi^{\mu\nu}$ выделить тензорную структуру $-q^{\mu\nu} q^2 + q^{\mu} q^{\nu}$:

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = (-g^{\mu\nu} q^2 + q^{\mu} q^{\nu}) \Pi(q), \quad (15.4 \text{ б})$$

то в соответствии с общими положениями теории для мнимой части поляризационного оператора можно написать соотношение

$$\text{Im} \Pi_R(q; m(\nu), g(\nu); \nu) = \text{Im} \Pi_R(\nu n; \bar{m}(Q^2), \bar{g}(Q^2); \nu), \quad (15.5)$$

$$Q^2 = -q^2 = s, \quad n^2 = 1.$$

¹⁾ Простой, но несколько громоздкий способ убедиться в этом состоит в применении соотношений унитарности (2.8) и (2.9) к процессу рассеяния на нулевой угол $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ во втором порядке теории возмущений по константе электромагнитного взаимодействия.

Таким образом, надо вычислить лишь величину $\text{Im} \Pi_R(q; m(v), g(v); v)$ и произвести в ней замены $q = v$, $m(v) \rightarrow \bar{m}(Q^2)$, $q(v) \rightarrow \bar{q}(Q^2)$. В нулевом порядке теории возмущений возникает диаграмма рис. 10, в, из которой, пренебрегая массами кварков, приводящими к поправкам порядка \bar{m}^2/s , получаем

$$\text{Im} \Pi_R^{(0)} = \frac{1}{12\pi} 3 \sum_{f=1}^{n_f} Q_f^2. \quad (15.6)$$

Формула (15.6) подтверждает результат старой партонной модели [58, 120], в которой кварки считались свободными. Поэтому принято рассматривать отношение сечения аннигиляции в адроны σ_h к сечению процесса $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$, вычисленному в низшем порядке теории возмущений по электромагнитному взаимодействию:

$$R(s) = \frac{\sigma_h(s)}{\sigma_{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-}^{(0)}(s)}. \quad (15.7)$$

В нулевом порядке теории возмущений это отношение равно

$$R^{(0)}(s) = 3 \sum_{f=1}^{n_f} Q_f^2. \quad (15.8)$$

Поправки следующего порядка представлены диаграммами рис. 10, г. С точностью до замены фотона глюоном и учета теоретико-группового множителя $\sum_{a,k} t_{ik}^a t_{kj}^a = C_F \delta_{ij}$ эти диаграммы аналогичны соответствующим диаграммам квантовой электродинамики, вычисленным много лет назад в работе [180]. Воспользовавшись этим результатом, получаем [18, 278]

$$R^{(1)}(s) = 3 \sum_{f=1}^{n_f} Q_f^2 \left\{ 1 + \frac{\alpha_s(Q^2)}{\pi} \right\}. \quad (15.9)$$

Поправки второго порядка вычислены в работах [67, 95]. В перенормировочной схеме \overline{MS} во втором порядке теории возмущений

$$R^{(2)}(s) = 3 \sum_{f=1}^{n_f} Q_f^2 \left\{ 1 + \frac{\alpha_s(Q^2)}{\pi} + r_2 \left(\frac{\alpha_s(Q^2)}{\pi} \right)^2 \right\},$$

$$r_2 = \left[\frac{2}{3} \zeta(3) - \frac{11}{12} \right] n_f + \frac{365}{24} - 11 \zeta(3) \simeq 2.0 - 0.12 n_f. \quad (15.10)$$

Здесь ζ — дзета-функция Римана, а для константы сильных взаимодействий α_s следует использовать выражение второго порядка теории возмущений.

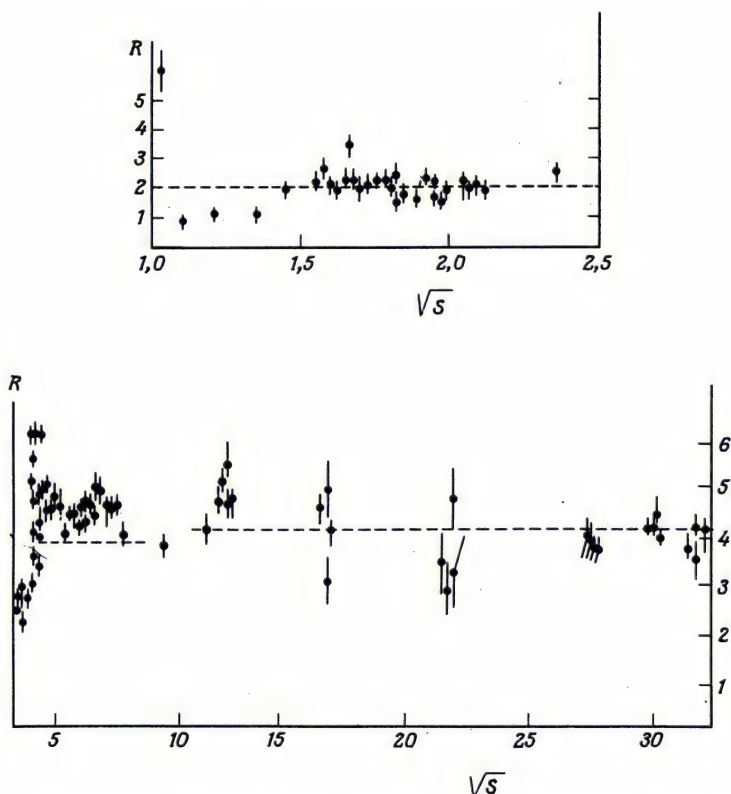


Рис. 11. Зависимость величины R от s . Штриховой линией показано (ведущее) предсказание КХД для R [265].

Необходимо рассмотреть еще вопрос о том, сколько ароматов кварков следует учитывать. Этот вопрос тесно связан с проблемой кварковых масс. Если масса кварка m_q удовлетворяет условию $s \gg m_q^2$, то возникают поправки типа $O(m_q^2/s)$. В пределе $s \rightarrow \infty$ они пренебрежимо малы по сравнению с поправками любого порядка по параметру α_s . Совершенно иная ситуация возникает, когда $m_q^2 \gg s$ и передаваемой энергии недостаточно для рождения дополнительных кварк-антикварковых пар. Этот вопрос будет подробно рассмотрен несколько ниже; здесь же мы примем эвристический рецепт, состоящий в том, что суммы по ароматам кварков следует распространять на ароматы только тех кварков, массы которых удовлетворяют условию $m_q^2 \ll s$. При этом порог рождения нового аромата $4m_q^2 \approx s$, в окрестности которого могут возникать сложные эффекты, рассматриваться не будет. Можно по-

казать, что в этой области теория возмущений КХД непосредственно не применима.

С учетом этих замечаний теоретические предсказания хорошо согласуются с экспериментальными данными, как видно на рис. 11, где приведены результаты первой экспериментальной проверки КХД¹⁾. Однако из-за больших систематических ошибок экспериментальных данных при такой проверке трудно выйти за рамки ведущего порядка теории возмущений КХД.

§ 16. Зависимость параметров теории и вычислений от выбора перенормировочной схемы

В квантовой электродинамике существует естественная перенормировочная схема, задаваемая тем фактом, что фотон и электрон находятся на массовой поверхности. Преимущество такой схемы следует из теоремы Тирринга [245], согласно которой при нулевой энергии фотона амплитуда комптоновского рассеяния (во всех порядках по константе α) точно дается классической формулой. Таким образом, для определения фундаментальных параметров теории α и m_e можно пользоваться классическими выражениями. В квантовой хромодинамике такой выделенной схемы, основывающейся на физических соображениях, нет. Таким образом, необходимо обсудить вопрос об изменениях, возникающих при переходе от одной перенормировочной схемы к другой. Пренебрежем массами кварков и калибровочными параметрами; их введение не внесет каких-либо дополнительных проблем, отличных от обсуждаемых здесь.

Рассмотрим некоторую физически наблюдаемую величину P . Очевидно, она не должна зависеть от перенормировочной схемы, использованной в процессе вычислений. Однако если эту величину представить в виде ряда по степеням константы связи

$$P = \sum_n C_n(R) [\alpha_s(R)]^n, \quad (16.1)$$

то коэффициенты C_n и константа связи α_s будут зависеть от используемой схемы перенормировки R . Если перейти к новой перенормировочной схеме R' , то связь между старой и новой схемами можно найти следующим образом. Разложим величину P , вычисленную в рамках новой перенормировочной схемы, в ряд по степеням константы связи $\alpha_s(R')$:

$$P = \sum_n C_n(R') [\alpha_s(R')]^n. \quad (16.2)$$

¹⁾ Более строгое рассмотрение этого вопроса дано в статье [29] и в цитированных там работах.

Подставляя в формулу (16.2) выражение для $\alpha_s(R')$, записанное в виде ряда по константе $\alpha_s(R)$, и приравнявая члены одинакового порядка в (16.2) и (16.1), найдем связь между коэффициентами, вычисленными в исходной и в новой перенормировочных схемах. Разложение константы $\alpha_s(R')$ по степеням константы $\alpha_s(R)$ можно записать в виде

$$\alpha_s(R') = \alpha_s(R) \{ 1 + a_1(R', R) \alpha_s(R) + \dots \}.$$

Очевидно, что первым членом разложения является единица, так как в нулевом порядке теории возмущений $\alpha_s = g_u^2 / (4\pi)$ не зависит от выбора схемы. Это означает, что $C_{0,1}(R) = C_{0,1}(R')$. Но все остальные коэффициенты при переходе от одной перенормировочной схемы в другую изменяются:

$$C_2(R) = C_2(R') + a_1(R', R) C_1(R') \text{ и т. д.}$$

Рассмотрим, например, величину R , введенную в предыдущем параграфе¹⁾. Если ее вычислить в схеме минимального вычитания (в которой устраняются только полюса $2/\epsilon$, а не вся комбинация $N_\epsilon = 2/\epsilon - \gamma_E + \log 4\pi$), то вместо формулы (15.10) получим

$$R_{ms}^{(2)}(s) = 3 \sum_{f=1}^{n_f} Q_f^2 \left\{ 1 + \frac{\alpha_{s,ms}(Q^2)}{\pi} + r_{2,ms} \left(\frac{\alpha_{s,ms}(Q^2)}{\pi} \right)^2 \right\},$$

$$r_{2,ms} = r_2 + (\log 4\pi - \gamma_E) \frac{33 - 2n_f}{12}. \quad (16.3)$$

Выражение для константы связи $\alpha_{s,ms}$ также отличается от формулы (14.4в). Оно имеет вид

$$\alpha_{s,ms}(Q^2) = \frac{12\pi}{(33 - 2n_f) \log Q^2 / \Lambda^2} \times \left\{ 1 - 3 \frac{153 - 19n_f}{(33 - 2n_f)^2} \cdot \frac{\log \log Q^2 / \Lambda^2}{\frac{1}{2} \log Q^2 / \Lambda^2} - \frac{\log 4\pi - \gamma_E}{\log Q^2 / \Lambda^2} \right\}. \quad (16.4)$$

Можно сохранить формулу (14.4в) для константы связи α_s , если определить новый параметр обрезания Λ_{ms} следующим образом:

$$\Lambda_{ms}^2 = e^{\gamma_E - \log 4\pi} \Lambda^2. \quad (16.5)$$

¹⁾ Подробное обсуждение этого вопроса для процессов глубоконеупругого рассеяния можно найти в статье [27].

Тогда выражение (16.4) запишется в виде

$$\alpha_{s,ms}(Q^2) = \frac{12\pi}{(33 - 2n_f)\log Q^2/\Lambda_{ms}^2} \left\{ 1 - 3 \frac{153 - 19n_f}{(33 - 2n_f)^2} \cdot \frac{\log \log Q^2/\Lambda_{ms}^2}{\frac{1}{2} \log Q^2/\Lambda_{ms}^2} \right\}, \quad (16.6)$$

с точностью до членов порядка $O([\alpha_s]^3)$.

К сожалению, часто забывают об этом простом факте: параметры теории можно получить только во втором порядке теории возмущений; в низшем же порядке параметры Λ и Λ_{ms} взаимозаменяемы, так как возникающая при этом ошибка второго порядка малости. Кроме того, когда приводят значение, например величины Λ (то же справедливо и для эффективной массы \hat{m}), надо указывать, в рамках какой перенормировочной схемы получено это значение. Как параметр обрезания Λ , так и эффективная масса \hat{m} являются ренорминвариантными величинами, но они меняются при переходе от одной схемы к другой. В этой книге в основном используется перенормировочная схема \overline{MS} вследствие ее простоты. В ней не возникает трансцендентных выражений (типа $-\gamma_E + \log 4\pi$). К тому же эта схема, вообще говоря, приводит к малым поправкам во втором порядке теории возмущений. Например, в схеме минимального вычитания для величины $r_{2,ms}$ имеем

$$r_{2,ms} \approx 7,4 - 0,44n_f,$$

в то время как в перенормировочной схеме \overline{MS} эта величина имеет значение $2,0 - 0,12 n_f$.

В этой схеме предпочтительное экспериментальное значение параметра обрезания равно

$$\Lambda \approx 0,13^{+0,07}_{-0,05} \text{ ГэВ.}$$

Это соответствует значению $\Lambda_{ms} \approx 0,05$ ГэВ. Значения эффективных кварковых масс равны

$$10 \gtrsim \hat{m}_u \gtrsim 5 \text{ МэВ}, \quad 20 \gtrsim \hat{m}_d \gtrsim 10 \text{ МэВ}, \quad 400 \gtrsim \hat{m}_s \gtrsim 200 \text{ МэВ.}$$

Численное значение параметра обрезания Λ можно было бы найти, сравнивая вычисленное теоретически значение величины R с измеренным значением, но точность экспериментальных данных довольно мала (рис. 11). Для этой цели можно использовать другие процессы, например процессы глубоко-неупругого рассеяния электронов или нейтрино или распады кваркониев ψ и Y . Определение эффективных масс кварков рассматривается в § 32.

§ 17. Кинематика процессов глубоконеупругого рассеяния; партонная модель

Рассмотрим процесс $l + h \rightarrow l' + \text{all}$, где l и l' — лептоны, h — адронная мишень, а символ all обозначает суммирование по всем возможным конечным состояниям Γ (рис. 12, а). Если начальный и конечный лептоны совпадают, т.е. $l = l' = e$ (электрон) или μ (мюон), (рис. 12, б) то этот процесс представляет собой исследование адрона h в низшем порядке теории возмущений по электромагнитному взаимодействию, а соответствующим оператором является электромагнитный ток

$$J_{\text{em}}^\mu = \sum_q Q_q \bar{q} \gamma^\mu q; \quad \mathcal{L}_{\text{int, em}} = e J_{\text{em}}^\mu A_\mu.$$

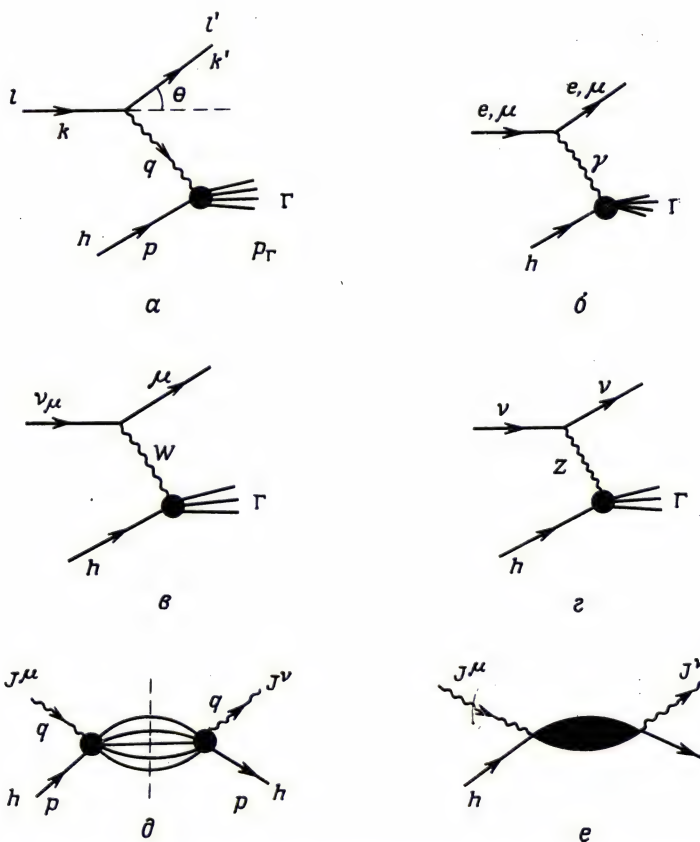


Рис. 12. Диаграммы, описывающие процесс глубоконеупругого рассеяния.

Если $l = \nu_\mu$ (нейтрино), а $l' = \mu$ (мезон) (рис. 12, в), то процесс обусловлен слабым заряженным током

$$J_w^\mu = \bar{u}\gamma^\mu(1 - \gamma_5)d_\theta + \bar{c}\gamma^\mu(1 - \gamma_5)s_\theta + \dots, \quad \mathcal{L}_{\text{int},w} = \frac{1}{2\sqrt{2}} g_w J_w^\mu W_\mu;$$

константа слабого взаимодействия g_w удовлетворяет соотношению $g_w^2/M_w^2 = 4\sqrt{2}G_F$, где $G_F = 1,027 \text{ м}^{-2}_{\text{протон}}$, M_w — масса векторного бозона, а

$$d_\theta = d \cos \theta_C + s \sin \theta_C, \quad s_\theta = -d \sin \theta_C + s \cos \theta_C.$$

Если $l = l' = \nu_\mu$ (нейтрино), то процесс вызван слабым нейтральным током (рис. 12, г); тогда в стандартной теории электрослабых взаимодействий имеем

$$J_Z^\mu = \left(\frac{1}{2} - \frac{4 \sin^2 \theta_w}{3} \right) \bar{u}\gamma^\mu u + \left(-\frac{1}{2} + \frac{2 \sin^2 \theta_w}{3} \right) \bar{d}\gamma^\mu d + \frac{1}{2} \bar{u}\gamma^\mu \gamma_5 u - \frac{1}{2} \bar{d}\gamma^\mu \gamma_5 d;$$

$$\mathcal{L}_{\text{int},Z} = \frac{e}{2 \cos \theta_w \sin \theta_w} J_Z^\mu Z_\mu,$$

где $\sin^2 \theta_w = 0,22$.

Введем бьеркеновские переменные

$$Q^2 = -q^2, \quad \nu = p \cdot q, \quad x = Q^2/2\nu;$$

заметим, что величину s в бьеркеновских переменных можно записать в виде

$$s = p_\Gamma^2 = -Q^2 + m_h^2 + 2\nu = 2\nu \left\{ 1 + m_h^2/2\nu - x \right\}.$$

Предел глубоконеупругого рассеяния, или *бьеркеновский предел*, соответствует значениям $Q^2, \nu \gg \Lambda^2$ при фиксированном $x = Q^2/2\nu$. Используя стандартные правила диаграммной техники, амплитуду рассеяния, например, для случая e/μ можно записать в виде

$$\mathcal{T}_{e+h \rightarrow e+\Gamma} = \frac{2\alpha}{q^2} \bar{u}(k', \sigma') \gamma^\mu u(k, \sigma) \times (2\pi)^2 \delta(p + q - p_\Gamma) \langle \Gamma | J_\mu(0) | p, \tau \rangle. \quad (17.1)$$

Здесь σ (σ') — спины падающего (рассеянного) электрона, а τ — спин адрона-мишени h . Отметим ковариантный характер нормировки векторов состояний (см. приложение Ж):

$$\langle p', \tau' | p, \tau \rangle = 2p^0 \delta_{\tau\tau'} \delta(\vec{p} - \vec{p}').$$

Для неполяризованных частиц сечение процесса $e + h \rightarrow e + \text{all}$ выражается через лептонный $L^{\mu\nu}$ и адронный $W^{\mu\nu}$ тензоры (массами лептонов мы всюду пренебрегаем)¹⁾

$$\begin{aligned} L^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \sum_{\sigma\sigma'} \bar{u}(k', \sigma') \gamma^\mu u(k, \sigma) [\bar{u}(k', \sigma') \gamma^\nu u(k, \sigma)]^* \\ &= 2(k^\mu k'^\nu + k^\nu k'^\mu - k \cdot k' g^{\mu\nu}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W^{\mu\nu}(p, q) &= \frac{1}{2} \frac{1}{2} \sum_{\tau} \sum_{\Gamma} (2\pi)^6 \delta(p + q - p_\Gamma) \langle p, \tau | J^\mu(0)^+ | \Gamma \rangle \\ &\quad \times \langle \Gamma | J^\nu(0) | p, \tau \rangle. \end{aligned} \quad (17.2 \text{ а})$$

Конечно, эрмитово-сопряженный электромагнитный ток $J^{\nu+}$ удовлетворяет равенству $J^{\nu+} = J^\nu$, но мы записали выражение (17.2а) в общем виде, справедливом и для процессов, обусловленных слабыми токами. Выражение (17.2а) можно записать в другом виде²⁾

$$W^{\mu\nu}(p, q) = \frac{1}{2} (2\pi)^2 \int d^4 z e^{iq \cdot z} \langle p | [J^\mu(z)^+, J^\nu(0)] | p \rangle, \quad (17.2 \text{ б})$$

где подразумевается усреднение по спину адрона-мишени τ .

Рассмотрим общий случай слабых или электромагнитных токов. Общее выражение для тензора $W^{\mu\nu}$, записанное в терминах инвариантов, характеризующих процесс рассеяния, имеет вид

$$\begin{aligned} W^{\mu\nu}(p, q) &= (-g^{\mu\nu} + q^\mu q^\nu / q^2) W_1 + \frac{1}{m_h^2} (p^\mu - \nu q^\mu / q^2)(p^\nu - \nu q^\nu / q^2) W_2 \\ &\quad + i \epsilon^{\mu\alpha\beta} \frac{p_\alpha q_\beta}{2m_h^2} W_3. \end{aligned} \quad (17.3)$$

¹⁾ Множители $1/2$ в формулах (17.2) возникают в результате усреднения по спину исходного нуклона и "спиральности" виртуального фотона.

²⁾ В эквивалентности такой записи можно убедиться, вставив в формулу (17.2б) сумму по полному набору состояний $\sum_{\Gamma} |\Gamma\rangle \langle \Gamma|$ и заметив, что в силу закона сохранения энергии-импульса вклад второго слагаемого равен нулю.

Другие возможные члены при свертке с лептонным тензором $L^{\mu\nu}$ обращаются в нуль. Соответствующие сечения рассеяния в лабораторной системе отсчета (в которой адрон h покоится) имеют вид ¹⁾

$$\frac{d\sigma^e}{d\Omega dk'_0} = \frac{\alpha^2}{4m_h k_0^2 \sin^4(\theta/2)} \left\{ W_2^e \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2 W_1^e \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\}, \quad (17.4 \text{ а})$$

$$\frac{d\sigma^{\nu/\bar{\nu}}}{d\Omega dk'_0} = \frac{G_F^2 k_0^2}{2\pi^2 m_h} \left\{ W_2^{\nu/\bar{\nu}} \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2 W_1^{\nu/\bar{\nu}} \sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{k^0 + k'^0}{2m_h} W_3^{\nu/\bar{\nu}} \right\}, \quad (17.4 \text{ б})$$

где θ — угол между векторами \vec{k} и \vec{k}' , $d\Omega = d \cos \theta d\varphi$; в формуле (17.4б) знаки $+$ ($-$) относятся к рассеянию ν ($\bar{\nu}$), G_F — постоянная Ферми, которую можно выразить через константу связи и массу W -бозона:

$$G_F = \sqrt{2} g_w^2 / 8 M_w^2.$$

Функции W_i являются инвариантами и зависят от переменных Q^2 и ν . Удобно определить *структурные функции* ²⁾

$$f_1^a(x, Q^2) = 2x W_1^a, \quad f_2^a(x, Q^2) = \frac{\nu}{m_h^2} W_2^a, \quad f_3^a(x, Q^2) = \frac{Q^2}{2m_h} W_3^a, \quad (17.5)$$

где индекс a обозначает процессы ($e/\mu h$, νh , $\bar{\nu} h$). Иногда вместо структурной функции f_1^a используется продольная структурная функция

$$f_L^a(x, Q^2) = f_2^a(x, Q^2) - f_1^a(x, Q^2). \quad (17.6)$$

Формулу (17.3) удобно переписать в терминах структурных функций f_i^a , пренебрегая импульсами q^μ и q^ν (которые при свертке с лептонным тензором $L_{\mu\nu}$ обращаются в нуль) ³⁾:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (2\pi)^2 \int d^4 z e^{iq \cdot z} \langle p | [J_\mu^a(z)^+, J_\nu^a(0)] | p \rangle &= \frac{\nu}{q^2} g^{\mu\nu} f_1^a + \frac{P^\mu P^\nu}{\nu} f_2^a + i \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \frac{q_\alpha P_\beta}{q^2} f_3^a \\ &= - \frac{\nu g^{\mu\nu}}{q^2} f_L^a + \left(\frac{\nu}{q^2} g^{\mu\nu} + \frac{P^\mu P^\nu}{\nu} \right) f_2^a + i \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \frac{q_\alpha P_\beta}{q^2} f_3^a. \end{aligned} \quad (17.7)$$

¹⁾ Все формулы относятся к процессам рассеяния электронов. Формулы для рассеяния μ -мезонов аналогичны. Для случая рассеяния нейтрино мы будем рассматривать только процессы, вызванные заряженными токами.

²⁾ Определенные таким образом функции f_i несколько отличаются от стандартных функций F , а именно $f_1 = 2x F_1$, $f_2 = F_2$, $f_3 = x F_3$. Такой способ введения структурных функций упрощает уравнения КХД, которые будут выписаны ниже. (Функции называются структурными, так как в системе бесконечного импульса они описывают вероятность обнаружения в адроне партона с долей импульса x . — Прим. перев.)

³⁾ В этом параграфе 4-вектор в координатном пространстве обозначен буквой x в отличие от бьеркеновской переменной x .

В случае e^+e^- -аннигиляции удобно рассматривать хронологическое произведение адронных токов

$$T_a^{\mu\nu}(p, q) = i(2\pi)^3 \int d^4z e^{iq \cdot z} \langle p | T J_a^\mu(z)^+ J_a^\nu(0) | p \rangle. \quad (17.8 \text{ а})$$

Если тензор $T^{\mu\nu}$ записать в виде

$$T_a^{\mu\nu} = \frac{\nu}{q^2} g^{\mu\nu} T_1^a(x, Q^2) + \frac{P^\mu P^\nu}{\nu} T_2^a(x, Q^2) + i\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \frac{q_\alpha P_\beta}{q^2} T_3^a(x, Q^2), \quad (17.8 \text{ б})$$

то, как показано на рис. 12, ∂ , e ,

$$f_i^a = \frac{1}{2\pi} \text{Im } T_i^a. \quad (17.8 \text{ в})$$

Рассмотрим бьеркеновский предел в так называемой *системе бесконечного импульса*:

$$p = (p^0, 0, 0, p^0); \quad q = (\nu/2p^0, \sqrt{Q^2}, 0, \nu/2p^0); \quad p^0 \approx \nu^{1/2} \rightarrow \infty. \quad (17.9)$$

Записав произведение $q \cdot z$ в виде

$$q \cdot z = \frac{1}{2} (q^0 - q^3)(z^0 + z^3) + \frac{1}{2} (q^0 + q^3)(z^0 - z^3) - q^1 z^1,$$

мы видим, что случай $z \cdot q \approx 0$ в бьеркеновском пределе соответствует приближенным соотношениям

$$z^0 \pm z^3 \approx 1/\nu^{1/2}, \quad z^1 \approx 1/\nu^{1/2}.$$

Иными словами $z^2 \rightarrow 0^{11}$.

Из хорошо известного свойства фурье-преобразования следует, что при фиксированном значении переменной x поведение фурье-образа коммутатора токов в (17.26) или хронологического произведения в (17.8а) при больших значениях переменной q определяется областью $z^2 \approx O(1/q^2)$, иными словами, поведением коммутатора или хронологического произведения адронных токов

$$[J^\mu(z)^+, J^\nu(0)] \quad \text{или} \quad TJ^\mu(z)^+ J^\nu(0). \quad (17.10)$$

на световом конусе.

¹¹ В действительности компоненту z_2 можно сделать сколь угодно большой. Однако этому соответствует $z^2 < 0$. При этом в силу локального характера теории коммутатор $[J(z), J(0)]$ равен нулю; ненулевой вклад возникает только в случае $z_2^2 \sim z_0^2$, т.е. при $z^2 \sim 0$.

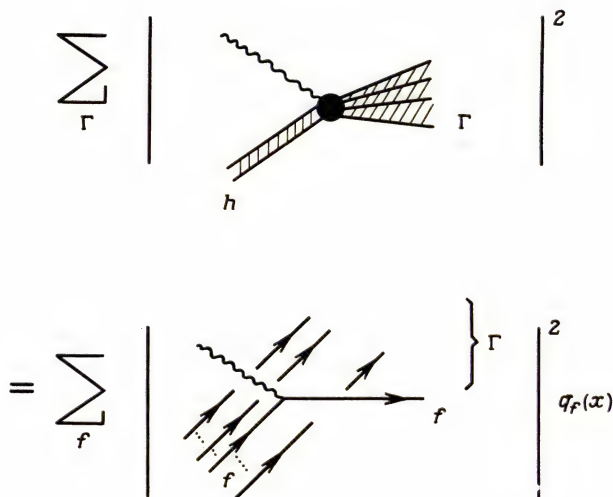


Рис. 13. Партоновая модель.

Учитывая явление асимптотической свободы, следует ожидать, что эти коммутаторы и хронологические произведения можно вычислить с точностью до логарифмических поправок, пренебрегая взаимодействием кварков и рассматривая адронную мишень как совокупность свободных кварков. Такая модель, названная *партоновой моделью*, была предложена Фейнманом [119]. Чтобы понять некоторые следствия этой модели, рассмотрим процесс глубоко-неупругого ep -рассеяния. Обозначим через $q_f(x)$ вероятность обнаружения в адроне кварка аромата f , обладающего долей импульса x . Тогда полное сечение реакции $e + p \rightarrow e + \text{all}$ получается некогерентным суммированием (кварки считаются свободными) взвешенных множителем $q_f(x)$ сечений процессов $e + f \rightarrow e + f$ (рис. 13), вычисление которых не представляет трудностей. Отсюда немедленно находим $f_2^{ep}(x, Q^2) = f_1^{ep}(x, Q^2)$ и

$$f_2^{ep}(x, Q^2) = x \sum_f Q_f^2 q_f(x). \quad (17.11)$$

Следует заметить, что сумма по индексу f распространяется также на антикварки, так как ожидается, что вероятность обнаружения внутри протона антикварка не равна нулю. Несколько ниже мы перепишем выражение (17.11) в более подробной форме, конкретизируя некоторые свойства различных плотностей распределения кварков $q_f(x)$.

Замечательной особенностью выражения (17.11) является *скейлинг*. Скейлинг был предсказан Бьеркеном [39] еще до возникновения партоновой моде-

ли, которая, по существу, была введена для его объяснения. Скейлинг означает, что в пределе $Q^2 \rightarrow \infty$ структурные функции $f_i^a(x, Q^2)$ становятся не зависящими от переменной Q^2 :

$$f_i^a(x, Q^2) \rightarrow f_i^a(x) \quad (17.12)$$

при $Q^2 \rightarrow \infty$ и фиксированном x .

Как будет показано ниже, КХД подтверждает наличие скейлинга в том смысле, что в рамках квантовой хромодинамики предсказывается его существование с точностью до логарифмических поправок $(\log Q^2/\Lambda^2)^d$. Более того, эти поправки можно вычислить, и полученные результаты подтверждаются экспериментальными измерениями нарушения скейлинга.

§ 18. Операторное разложение

Для строгого анализа произведения операторов, взятых в точках, разделенных малым или светоподобным интервалом, служит *метод операторного разложения* (operator product expansion – OPE)¹⁾. Обсуждение этого метода начнем с простейшего случая хронологического произведения двух свободных безмассовых скалярных полей $T\phi(x)\phi(y)$. В пределе $x \rightarrow y$ это произведение сингулярно. Но сингулярность представляет собой просто c -число. Ее можно выделить из T -произведения, записав его в виде

$$T\phi(x)\phi(y) = \Delta(x-y)1 + :\phi(x)\phi(y):,$$

где **1** – единичный оператор, а Δ – пропагатор скалярного поля

$$\Delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{-ik \cdot x} \frac{1}{k^2 + i0} = \frac{1}{(2\pi)^2} \cdot \frac{1}{x^2 - i0}.$$

В пределе $x \rightarrow y$ оператор $:\phi(x)\phi(y):$ и, конечно, единичный оператор **1** являются регулярными величинами.

В общем случае произведение локальных (элементарных или составных) операторов A и B , взятых в точках x и y , *разделенных малым интервалом*, можно записать в виде *вильсоновского разложения*

$$TA(x)B(y) = \sum_i C_i(x-y)N_i(x, y), \quad (18.1)$$

¹⁾ Метод операторного разложения был предложен Вильсоном [268], а затем развит для случая малых расстояний в работах [270, 281] и др. Случай операторов, взятых на световом конусе, рассмотрен в работах [51, 128]. Для расчетов процессов глубоконеупругого рассеяния этот метод был применен в работе [70]; использование операторного разложения в КХД обсуждается в статьях [142, 161, 162].

где *вильсоновские коэффициенты* C_t в общем случае представляют собой сингулярные c -числовые функции разности $x \rightarrow y$, а $N_t(x, y)$ — бислокальные операторы, регулярные в пределе $x \rightarrow y$. Последние обозначены буквой N , чтобы подчеркнуть, что они являются составными нормально упорядоченными операторами. Разложение вида (18.1) является не чем иным, так обобщением разложения в случае свободных полей. Запишем T -произведение двух операторов $A(x)$ и $B(y)$ в виде

$$TA(x)B(y) = \sum \frac{i^n}{n!} \int dz_1 \dots dz_n TA^0(x)B^0(y) \mathcal{L}_{\text{int}}^0(z_1) \dots \mathcal{L}_{\text{int}}^0(z_n).$$

Здесь индекс 0 означает, что соответствующие величины строятся из свободных полевых функций. Применяя к этому выражению теорему Вика, приходим к разложению (18.1). Но необходимость записи приведенного выражения в общем виде возникает довольно редко. Если нас интересует поведение произведения операторов в пределе $x \rightarrow y$, то можно прибегнуть к более простому способу. А именно достаточно рассмотреть базис, образованный всеми операторами, обладающими теми же квантовыми числами и трансформационными свойствами, что и исходное произведение AB (в частности, если операторы A и B скалярные и калибровочно-инвариантные, то при построении базиса должны быть рассмотрены только скалярные и калибровочно-инвариантные операторы). В этом случае имеем операторы

$$1, : \bar{q}(x)q(y) :, : \bar{q}(x)Dq(y) :, \dots, : (\bar{q}(x)q(y))^2 :, \dots, : G(x)G(y) :, \dots \quad (18.2)$$

т.е. бесконечную последовательность операторов. Но в пределе $x \rightarrow y$ требуются только некоторые из них (иногда для выяснения лидирующего поведения достаточно одного). Это можно показать следующим образом. Пусть размерность оператора N равна ρ_N ; тогда среди операторов (18.2) низшей размерностью обладают операторы

$$1 (\rho_1 = 0), : \bar{q}q : (\rho_{\bar{q}q} = 3), : \bar{q} \not{D} q : (\rho_{\bar{q} \not{D} q} = 4) \text{ и } : G^2 : (\rho_{G^2} = 4).$$

Если предположить, что размерность каждого из операторов A и B равна 3, то простой подсчет размерностей позволяет заключить, что размерность вильсоновского коэффициента C_1 равна 6, коэффициент $C_{\bar{q}q}$ имеет размерность 3, а размерность коэффициентов $C_{\bar{q}Dq}$ и C_{G^2} равна 2. Следовательно, явно выделяя массу из коэффициента $C_{\bar{q}q}$, получаем

$$\begin{aligned} C_1(x-y) &\approx (x-y)^{-6}, & C_{\bar{q}q}(x-y) &\approx m(x-y)^{-2}, \\ C_{\bar{q}Dq}(x-y) &\approx (x-y)^{-2}, & C_{G^2}(x-y) &\approx (x-y)^{-2}, \end{aligned} \quad (18.3)$$

где x^6 означает $(x \cdot x)^3$, x^{-2} означает $1/x^2$ и т.д. Очевидно, что эти соотношения точно выполняются лишь в случае свободных полей. Асимптотическая свобода КХД гарантирует, что поправки к соотношениям (18.3) могут быть только логарифмическими. Эти поправки не вносят существенных изменений во все проводимые рассуждения.

Коэффициенты при других операторах в пределе $x \rightarrow 0$ оказываются конечными. Если теперь взять какой-нибудь матричный элемент от разложения (18.1):

$$\begin{aligned} \langle \Phi | TA(x)B(0) | \Psi \rangle &=_{x \rightarrow 0} C_1(x) \langle \Phi | \Psi \rangle + C_{\bar{q}q}(x) \langle \Phi | : \bar{q}(0)q(0) : | \Psi \rangle \\ &+ C_{\bar{q}Dq}(x) \langle \Phi | : \bar{q}(0)Dq(0) : | \Psi \rangle \\ &+ C_{G^2}(x) \langle \Phi | : G^2(0) : | \Psi \rangle + \dots, \end{aligned} \quad (18.4)$$

то из регулярности операторов N_t следует, что в пределе $x \rightarrow 0$ поведение левой части (18.4) определяется вильсоновскими коэффициентами, умноженными на конечные константы $\langle \Phi | N_t | \Psi \rangle$. Таким образом, в пределе $x \rightarrow 0$ лидирующее поведение хронологического произведения операторов $TA(x)B(0)$ определяется коэффициентом $C_1(x)$, а старшие поправки контролируются коэффициентами $C_{\bar{q}q}$, $C_{\bar{q}Dq}$ и C_{G^2} .

Вернемся к разложению (18.1). Так как операторы $N_t(x, y)$ регулярны, их можно разложить по степеням разности $x - y$. При $y = 0$ получаем

$$N_t(x, 0) = \sum_n x_{\mu_1} \dots x_{\mu_n} N_t^{(n)\mu_1 \dots \mu_n}(0, 0).$$

Например, для полей $\bar{q}(x)$ и $q(x)$ имеем

$$: \bar{q}(0)q(-x) : = \sum_n x_{\mu_1} \dots x_{\mu_n} \frac{(-1)^n}{n!} : \bar{q}(0) \partial^{\mu_1} \dots \partial^{\mu_n} q(0) :. \quad (18.5)$$

В случае калибровочной теории, такой как КХД, обычные производные, фигурирующие в (18.5), следует заменить ковариантными производными¹⁾. Тогда получаем

$$\begin{aligned} TA(x)B(0) &=_{x \rightarrow 0} C_1(x)1 + C_{\bar{q}q}(x) \sum_n x_{\mu_1} \dots x_{\mu_n} \frac{(-1)^n}{n!} \\ &\times : \bar{q}(0)D^{\mu_1} \dots D^{\mu_n} q(0) : + \dots \end{aligned} \quad (18.6)$$

¹⁾ Интуитивно это ясно. Формальное доказательство можно получить, заметив, что оператор $\bar{q}(0)q(-x)$ не является калибровочно-инвариантным. Калибровочная инвариантность восстанавливается при введении экспоненциального множителя $\exp \int_{-x}^0 dy_\mu \sum_i t^a B_\mu^i$. См., например, работу [269] и приложение И.

В пределе $x \rightarrow 0$ члены, содержащие производные, в (18.6) в общем случае представляют собой малые поправки, так как они содержат дополнительные степени x . Но такое утверждение *неверно* для *разложения на световом конусе*. В этом случае нас интересует поведение в пределе $x^2 \rightarrow 0$, который отнюдь не означает, что каждая из компонент $x \rightarrow 0$. Поэтому при разложении на световом конусе все производные в правой части (18.6) дают одинаковые вклады.

Применим теперь операторное разложение к хронологическому произведению адронных токов, появившихся в формулах для процессов глубоко-неупругого рассеяния. Поведение этих токов на световом конусе определяет в бьеркеновском пределе структурные функции кварков. Прежде чем приступить к расчетам, введем некоторые обозначения. Вначале рассмотрим векторные и аксиальные токи, описанные в § 17. Их можно записать в виде комбинаций из восемнадцати токов:

$$\begin{aligned} V_a^\mu(x) &= \sum_{ff'} : \bar{q}_f(x) \lambda_{ff'}^a \gamma^\mu q_f(x) :, \\ A_a^\mu(x) &= \sum_{ff'} : \bar{q}_f(x) \lambda_{ff'}^a \gamma^\mu \gamma_5 q_f(x) :, \\ V_0^\mu(x) &= \sum_f : \bar{q}_f(x) \gamma^\mu q_f(x) :, \\ A_0^\mu(x) &= \sum_f : \bar{q}_f(x) \gamma^\mu \gamma_5 q_f(x) :. \end{aligned} \quad (18.7)$$

Этим токам можно придать единообразный вид, полагая $\lambda_{ff'}^0 = \delta_{ff'}$ и считая, что индекс a пробегает значения $0, 1, \dots, 8$. Например, электромагнитный ток кварков записывается в виде

$$J_{em}^\mu = \frac{1}{2} \left\{ V_3^\mu + \frac{1}{\sqrt{3}} V_8^\mu \right\}. \quad (18.8)$$

Отметим, что матрицы λ действуют в пространстве ароматов. Мы включаем в рассмотрение кварки трех сортов: $q_1 = u$, $q_2 = d$ и $q_3 = s$; учет остальных сортов кварков не представляет трудности. Естественно, во всех формулах подразумевается суммирование по цветовым индексам.

Начнем с рассмотрения свободных полей. Используя теорему Вика, T -произведение двух векторных токов можно записать в виде

$$\begin{aligned} TV_a^\mu(x) V_b^\nu(y) &= \sum T : \bar{q}_{ia}(x) \lambda_{ik}^a \gamma_{\alpha\beta}^\mu q_{k\beta}(x) : : \bar{q}_{j\delta}(y) \lambda_{jl}^b \gamma_{\delta\rho}^\nu q_{l\rho}(y) : \\ &= \lim_{z^2 \rightarrow 0} \frac{2n_c \delta_{ab} (g^{\mu\nu} z^2 - 2z^\mu z^\nu)}{\pi^4 (z^2 - i0)^4} \cdot 1 \\ &\quad + \sum (if_{abc} + d_{abc}) \gamma_{\alpha\beta}^\mu S_{\beta\delta}(x-y) \gamma_{\delta\rho}^\nu : \bar{q}_\alpha(x) \lambda^c q_\rho(y) : \end{aligned}$$

$$+ \sum (-if_{abc} + d_{abc}) \gamma_{a\beta}^{\nu} S_{\beta\delta} (y-x) \gamma_{\delta\rho}^{\mu} \times \bar{q}_a(y) \lambda^c q_\rho(x) + \dots, \quad (18.9)$$

где $z = x - y$, n_c — число цветов (равное 3), а многоточие обозначает четырехкварковые операторы $:\bar{q}q\bar{q}q:$. Как объяснялось выше, в случае разложения на световом конусе такие операторы дают поправки к основным членам. Мы пока ограничимся рассмотрением только основных эффектов. При получении формулы (18.9) использованы соотношения

$$Tq_\beta(x)\bar{q}_\delta(y) = -:\bar{q}_\delta(y)q_\beta(x): + S_{\beta\delta}(x-y),$$

и свойства матриц λ и γ (приложения А и В). Заменим пропагатор S выражением, определяющим его поведение на световом конусе:

$$S(z) \underset{z^2 \rightarrow 0}{\simeq} \frac{2i\not{z}}{(2\pi)^2(z^2 - i0)^2},$$

которое легко получить из формулы для пропагатора

$$S(z) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ip \cdot z} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i0}$$

(приложение Е). После некоторых вычислений с γ -матрицами (приложение А) формулу (18.9) можно привести к виду

$$\begin{aligned} TV_\alpha^\mu(x) V_b^\nu(y) = \\ = 2i \sum_{z^2 \rightarrow 0} (if_{abc} + d_{abc}) \left\{ S^{\mu\alpha\nu\beta} \frac{z_\alpha}{(2\pi)^2(z^2 - i0)^2} : \bar{q}(x) \lambda^c \gamma_\beta q(y) : \right. \\ \left. + i\epsilon^{\mu\alpha\nu\beta} \frac{z_\alpha}{(2\pi)^2(z^2 - i0)^2} : \bar{q}(x) \lambda^c \gamma_\beta \gamma_5 q(y) : \right\} \\ + (x \leftrightarrow y, a \leftrightarrow b, \mu \leftrightarrow \nu) + \text{постоянный член.} \end{aligned} \quad (18.10)$$

Постоянный член

$$\frac{6\delta_{ab}(g^{\mu\nu}z^2 - 2z^\mu z^\nu)}{\pi^4(z^2 - i0)^4} 1$$

не выписан в явном виде, так как он не дает вклада в коммутатор, фигурирующий в выражении для адронного тензора $W^{\mu\nu}$ (в других случаях, например при вычислении $\langle TV^a V^b \rangle_0$, этот член может оказаться лидирующим). Полагая затем $y = 0$ и разлагая регулярные операторы $:\bar{q} \dots q:$ в ряды по

степеням переменной z , получаем следующее разложение хронологического произведения $TV_a^\mu(z)V_b^\nu(0)$ на световом конусе:

$$\begin{aligned}
 TV_a^\mu(z)V_b^\nu(0) = & \sum_{z^2 \rightarrow 0} -i \sum_{n \text{ нечетн}} d_{abc} S^{\mu\alpha\nu\beta} \frac{z_\alpha}{\pi^2(z^2 - i0)^2} \cdot \frac{z_{\mu_1} \dots z_{\mu_n}}{n!} \\
 & \times : \bar{q}(0) \lambda^c \gamma_\beta D^{\mu_1} \dots D^{\mu_n} q(0) : \\
 & + i \sum_{n \text{ нечетн}} f_{abc} \epsilon^{\mu\alpha\nu\beta} \frac{z_\alpha}{\pi^2(z^2 - i0)^2} \cdot \frac{z_{\mu_1} \dots z_{\mu_n}}{n!} \\
 & \times : \bar{q}(0) \lambda^c \gamma_\beta \gamma_5 D^{\mu_1} \dots D^{\mu_n} q(0) : \\
 & + \text{постоянный член} + \text{градиентные члены} + \\
 & + \text{нечетные по перестановкам } (\mu \leftrightarrow \nu, a \leftrightarrow b) \text{ члены.}
 \end{aligned} \tag{18.11}$$

Выражение (18.11) приведено к такому виду, что все фигурирующие в нем производные действуют на функции, стоящие справа от них. Чтобы добиться этого, в случае необходимости добавлены градиентные члены. Нечетные относительно перестановок $(\mu \leftrightarrow \nu, a \leftrightarrow b)$ члены явно не выписаны. При подстановке их в выражение для $W^{\mu\nu}$ все они обращаются в нуль, так как мы рассматриваем диагональные матричные элементы $\langle p | TJJ | p \rangle^1$.

В выражении (18.11) полезно произвести некоторую перегруппировку членов. Мы не будем рассматривать здесь общий случай, а просто продемонстрируем этот метод на примере произведения двух электромагнитных токов. В этом случае (18.8) и (18.11) приводят к следующему выражению (здесь опущены градиентные, постоянные и нечетные по перестановке $\mu \leftrightarrow \nu$ члены, а также индекс ϵm):

$$\begin{aligned}
 TJ^\mu(z)J^\nu(0) = \\
 = i \sum_{z^2 \rightarrow 0} \sum_{n \text{ нечетн}} S^{\mu\alpha\nu\beta} \frac{-z_\alpha}{\pi^2(z^2 - i0)^2} \cdot \frac{z_{\mu_1} \dots z_{\mu_n}}{n!} : \bar{q}(0) Q_e^2 \gamma_\beta D^{\mu_1} \dots D^{\mu_n} q(0) : ,
 \end{aligned}$$

где Q_e — оператор электрического заряда, действующий в пространстве ароматов:

$$Q_e = \begin{bmatrix} 2/3 & & 0 \\ & -1/3 & \\ 0 & & -1/3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left(\lambda^3 + \frac{1}{\sqrt{3}} \lambda^8 \right).$$

Далее разобьем это выражение на два члена, один из которых пропорционален тензору $g^{\mu\nu}$ (в дальнейшем он будет отождествлен со структурной функ-

¹⁾ Для процессов, в расчетах которых фигурируют недиагональные матричные элементы, необходимо учитывать градиентные члены. Пример такой ситуации приведен в § 27, п. 3.

цией f_1), а другой не зависит от него (он приводит к функции f_2). Это легко сделать, используя явный вид тензоров $S^{\mu\alpha\nu\beta}$. После некоторых переобозначений индексов получаем

$$TJ^\mu(z)J^\nu(0)$$

$$= i \left\{ g^{\mu\nu} \frac{1}{\pi^2(z^2 - i0)^2} \sum_{n \text{ четн}} z_{\mu_1} \dots z_{\mu_n} \frac{1}{(n-1)!} \right. \\ \times \bar{q}(0) Q_e^2 \gamma^{\mu_1} D^{\mu_2} \dots D^{\mu_n} q(0) : \\ + \frac{-1}{2\pi^2(z^2 - i0)} \sum_{n \text{ четн}} z_{\mu_1} \dots z_{\mu_n} \frac{1}{n!} \\ \left. \times [\bar{q}(0) Q_e^2 \gamma^\mu D^\nu D^{\mu_1} \dots D^{\mu_n} q(0) : + (\mu \leftrightarrow \nu)] \right\}, \quad (18.12)$$

где (во втором члене в правой части) использовано равенство $z_{\alpha}/(z^2 - i0)^2 = -\frac{1}{2} \partial_\alpha (z^2 - i0)^{-1}$, при помощи которого действие производной ∂_α переносится на переменную z_{μ_1} . Наконец, разобьем тензор Q_e^2 на компоненту, пропорциональную единичной матрице (являющуюся синглетом по отношению к преобразованиям группы аромата $SU_F(3)$), и компоненту, пропорциональную оператору Q_e и, следовательно, несинглетную по отношению к преобразованиям группы аромата:

$$Q_e^2 = c_{eNS} Q_e + c_{eF} = \frac{1}{6} \lambda^3 + \frac{1}{6\sqrt{3}} \lambda^8 + \frac{2}{9}; \\ c_{eNS} = 1/3, \quad c_{eF} = 2/9. \quad (18.13)$$

Окончательно получаем выражение для хронологического произведения двух электромагнитных токов в виде

$$TJ^\mu(z)J^\nu(0) = -g^{\mu\nu} \frac{i}{\pi^2(z^2 - i0)^2} \sum_{n \text{ четн}} z_{\mu_1} \dots z_{\mu_n} \frac{i^{n-1}}{n-1} \\ \times \left\{ \frac{1}{6} N_{NS,3}^{(e)\mu_1 \dots \mu_n}(0) + \frac{1}{6\sqrt{3}} N_{NS,8}^{(e)\mu_1 \dots \mu_n}(0) + \frac{2}{9} N_F^{(e)\mu_1 \dots \mu_n}(0) \right\} \\ + \frac{i}{2\pi^2(z^2 - i0)} \sum_{n \text{ четн}} z_{\mu_1} \dots z_{\mu_n} i^{n-1} \\ \times \left\{ \frac{1}{6} N_{NS,3}^{(e)\mu\nu\mu_1 \dots \mu_n}(0) + \frac{1}{6\sqrt{3}} N_{NS,8}^{(e)\mu\nu\mu_1 \dots \mu_n}(0) \right. \\ \left. + \frac{2}{9} N_F^{(e)\mu\nu\mu_1 \dots \mu_n}(0) + (\mu \leftrightarrow \nu) \right\}, \quad (18.14 \text{ а})$$

где введены обозначения

$$N_{NS,a}^{(e)\mu_1 \dots \mu_n} = \frac{i^{n-1}}{(n-2)!} : \sum_{ff'} \bar{q}_f(0) \gamma^{\mu_1} D^{\mu_2} \dots D^{\mu_n} \lambda_{ff'}^a q_{f'}(0) : ,$$

$$N_F^{(e)\mu_1 \dots \mu_n} = \frac{i^{n-1}}{(n-2)!} : \sum_f \bar{q}_f(0) \gamma^{\mu_1} D^{\mu_2} \dots D^{\mu_n} q_f(0) : ,$$

$$a = 1, \dots, 8. \quad (18.14 \text{ б})$$

В завершение этого параграфа мы выведем вновь явление скейлинга, используя операторное разложение на световом конусе в случае свободных полей (партонную модель), а именно выражения (18.12) и (18.14). Рассмотрим тензор $T_{\text{em}}^{\mu\nu}$ (ср. с (17.18))

$$T_{\text{em}}^{\mu\nu}(p, q) =$$

$$\stackrel{\text{Bj}}{=} (2\pi)^3 \left\{ \frac{-g^{\mu\nu}}{\pi^2} \int d^4 z e^{iq \cdot z} \sum_{n \text{ четн}} \frac{iz_{\mu_1} \dots iz_{\mu_n}}{(z^2 - i0)^2 (n-1)} A_n^{\mu_1 \dots \mu_n}(p) \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2\pi^2} \int d^4 z e^{iq \cdot z} \sum_n \frac{iz_{\mu_1} \dots iz_{\mu_n}}{z^2 - i0} [A_n^{\mu\nu\mu_1 \dots \mu_n}(p) + (\mu \leftrightarrow \nu)] \right\}, \quad (18.15 \text{ а})$$

где индекс Bj означает, что данное равенство справедливо в бьеркеновском пределе, а

$$A_n^{\mu_1 \dots \mu_n}(p) = i^n \langle p | \frac{1}{(n-2)!} : \bar{q}(0) Q_e^2 \gamma^{\mu_1} D^{\mu_2} \dots D^{\mu_n} q(0) : | p \rangle. \quad (18.15 \text{ б})$$

Величины A можно записать, исходя из инвариантов, характеризующих изучаемый процесс:

$$A_n^{\mu_1 \dots \mu_n}(p) = -ip^{\mu_1} \dots p^{\mu_n} a_n + \text{члены со свертками}.$$

Члены со свертками по двум импульсным индексам (содержащие тензоры $g^{\mu_i \mu_j}$) дают вклады, пропорциональные p^2 , и, следовательно, здесь могут не учитываться. При этом тензор $T_{\text{em}}^{\mu\nu}$ принимает вид

$$T_{\text{em}}^{\mu\nu}(p, q) \stackrel{\text{Bj}}{=} i(2\pi)^3 \left\{ \frac{g^{\mu\nu}}{\pi^2} \int d^4 z e^{iq \cdot z} \frac{1}{(z^2 - i0)^2} \sum_{n \text{ четн}} (iz \cdot p)^n a_n \frac{1}{n-1} \right.$$

$$\left. + \frac{p^\mu p^\nu}{\pi^2} \int d^4 z e^{iq \cdot z} \frac{1}{z^2 - i0} \sum_{n \text{ четн}} (iz \cdot p)^n a_{n+2} \right\}.$$

Сравнивая это выражение с (17.86), получаем

$$T_1^{\text{em}}(x, Q^2) \stackrel{\text{Bj}}{=} i \frac{q^2}{\nu} \cdot \frac{(2\pi)^3}{\pi^2} \int d^4 z e^{iq \cdot z} \frac{1}{(z^2 - i0)^2} \sum_{n \text{ четн}} (iz \cdot p)^n \frac{a_n}{n-1},$$

$$T_2^{\text{em}}(x, Q^2) \stackrel{\text{Bj}}{=} i\nu \frac{(2\pi)^3}{\pi^2} \int d^4 z e^{iq \cdot z} \frac{1}{z^2 - i0} \sum_{n \text{ четн}} (iz \cdot p)^n a_{n+2}. \quad (18.16)$$

Последняя формула, которая нам понадобится, имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial q_{\mu_1}} \dots \frac{\partial}{\partial q_{\mu_n}} = 2^n q^{\mu_1} \dots q^{\mu_n} \left(\frac{\partial}{\partial q^2} \right)^n + \text{члены со свертками}. \quad (18.17)$$

Используя ее для замены переменной iz_{μ_j} на производную $\partial/\partial q^{\mu_j}$ в выражениях (18.16), запишем их в виде

$$\begin{aligned} T_1^{\text{em}}(x, Q^2) &\stackrel{\text{Bj}}{=} i \frac{q^2}{\nu} \cdot \frac{(2\pi)^3}{\pi^2} \sum \frac{2^n a_n}{n-1} q_{\mu_1} \dots q_{\mu_n} p^{\mu_1} \dots p^{\mu_n} \left(\frac{\partial}{\partial q^2} \right)^n \\ &\quad \times \int d^4 z \frac{e^{iq \cdot z}}{(z^2 - i0)^2} \\ &\stackrel{\text{Bj}}{=} - (2\pi)^3 \frac{q^2}{\nu} \sum (2\nu)^n \frac{a_n}{n-1} \left(\frac{\partial}{\partial q^2} \right)^n \cdot \log q^2 \\ &= 2(2\pi)^3 \sum \frac{(n-2)! a_n}{x^{n-1}} = t(x)/x, \end{aligned} \quad (18.18 \text{ а})$$

$$\begin{aligned} T_2^{\text{em}}(x, Q^2) &\stackrel{\text{Bj}}{=} i\nu \frac{(2\pi)^3}{\pi^2} \sum a_{n+2} (2\nu)^n \left(\frac{\partial}{\partial q^2} \right)^n \int d^4 z \frac{e^{iq \cdot z}}{z^2 - i0} \\ &\stackrel{\text{Bj}}{=} - 4\nu (2\pi)^3 \sum (2\nu)^n a_{n+2} \left(\frac{\partial}{\partial q^2} \right)^n \frac{1}{q^2} \\ &= 2(2\pi)^3 \sum \frac{n! a_{n+2}}{x^{n+1}} = T_1^{\text{em}}(x, Q^2). \end{aligned} \quad (18.18 \text{ б})$$

При получении этих выражений использованы фурье-преобразования, приведенные в приложении Е, и введено обозначение

$$t(x) \equiv 2(2\pi)^3 \sum_n n! a_{n+2} \frac{1}{x^n}. \quad (18.18 \text{ в})$$

Взяв мнимые части этих выражений, мы приходим к бьеркеновскому скейлингу и равенству структурных функций $f_1(x) = f_2(x)$. Последнее соотношение, которое приводит к обращению в нуль продольной структурной функции, известно как соотношение Каллана – Гросса [62] (см. также [41]). Другой вывод, из которого ясно, что величина $f_2(x)/x$ имеет смысл вероятности обнаружить кварк с долей x полного импульса p в системе отсчета бесконечного импульса, содержится в работе [157].

§ 19. Применение операторного разложения к процессам глубоконеупругого рассеяния; моменты

В § 18 не конкретизировалась теория поля, в рамках которой применялось операторное разложение. Предполагалось только, что это теория свободных полей. Перейдем теперь к реальной физической ситуации и учтем взаимодействие между полями.

Рассмотрим снова хронологическое произведение токов

$$TJ_p^\mu(x) + J_p^\nu(y), \quad (19.1)$$

где индекс p обозначает любой ток или комбинацию токов из тех, которые содержатся в (18.7). Но теперь мы хотим учесть взаимодействие между полями, из которых построены эти токи. По-прежнему будем пренебрегать членами, подавляемыми степенями отношения M^2/Q^2 , где M — некоторая масса. Операторное разложение можно провести по базису, содержащему операторы, дающие ведущий по степеням M^2/Q^2 вклад в случае свободных полей. При этом в рамках КХД возникают лишь дополнительные логарифмические поправки. Если классифицировать операторы по твисту τ , определяемому соотношением $\tau = p - j$, где p — размерность оператора, построенного из свободных полей, а j — спин оператора, то, исходя из размерного анализа, легко видеть, что ведущий вклад возникает от операторов с $\tau = 2$. Вклады операторов с $\tau = 2n + 2$ подавляются в отношении $(M^2/Q^2)^n$ по сравнению с вкладами операторов с $\tau = 2$.

Единственными операторами с $\tau = 2$, которые можно связать с (19.1), являются операторы ¹⁾

$$N_{NS,a\pm}^{\mu_1 \dots \mu_n} = \frac{1}{2} \frac{i^{n-1}}{(n-2)!} \mathcal{S} : \bar{q}(0) \lambda^a \gamma^{\mu_1} (1 \pm \gamma_5) D^{\mu_2} \dots D^{\mu_n} q(0) :,$$

$$a = 1, \dots, 8;$$

$$N_{F\pm}^{\mu_1 \dots \mu_n} = \frac{1}{2} \frac{i^{n-1}}{(n-2)!} \mathcal{S} : \bar{q}(0) \lambda^0 \gamma^{\mu_1} (1 \pm \gamma_5) D^{\mu_2} \dots D^{\mu_n} q(0) :;$$

$$N_V^{\mu_1 \dots \mu_n} = \frac{i^{n-2}}{(n-2)!} \mathcal{S} \text{Tr} : G^{\mu_1 \alpha}(0) D^{\mu_2} \dots D^{\mu_{n-1}} G_\alpha{}^{\mu_n}(0) :, \quad (19.2)$$

где \mathcal{S} обозначает симметризацию, т.е. $\mathcal{S} a_{i_1 \dots i_n} = (1/n!) \sum_{\text{по перестановкам } \pi} a_{\pi(i_1, \dots, i_n)}$; взятие следа производится по цветовым индексам, а ковариантная производная D определяется по формуле

$$D_\mu G_{\alpha\beta}^a \equiv \sum_c \left\{ \partial_\mu \delta^{ac} + g \sum f^{abc} B_\mu^b \right\} G_{\alpha\beta}^c.$$

¹⁾ Индексы $F(V)$ обозначают синглетные операторы, построенные из полей фермионов (векторных бозонов).

С первыми двумя типами операторов (19.2) мы уже встречались (см. (18.14)). При этом оператор N^e определялся в виде суммы $N^e = N^+ + N^-$. Очевидно, что ненулевые проекции кварковых токов на чисто глюонные операторы можно получить только в том случае, если учесть взаимодействие между глюонами и кварками. Именно поэтому теперь возник оператор N_V в (19.2).

Если мы работаем в калибровке, требующей введения \dot{d} ухов, то кроме операторов (19.2) необходимо учитывать также операторы, составленные из полей \dot{d} ухов. Но можно доказать, что благодаря треугольному виду матрицы смешивания (см., например, [97, 183]) при рассмотрении операторов с $\tau = 2$ \dot{d} ухами можно полностью пренебречь. К этому вопросу мы вернемся несколько ниже. Запишем операторное разложение выражения (19.1) в виде

$$\begin{aligned} TJ_p^\mu(z)^+ J_p^\nu(0) = & - \sum_{j,n} \bar{C}_{1pj}^n(z^2) g^{\mu\nu} i^{n-1} z_{\mu_1} \dots z_{\mu_n} N_j^{\mu_1 \dots \mu_n}(0) \\ & - \sum_{j,n} \bar{C}_{2pj}^n(z^2) i^{n-1} z_{\mu_1} \dots z_{\mu_n} N_j^{\mu\nu\mu_1 \dots \mu_n}(0) \\ & + \sum_{j,n} \bar{C}_{3pj}^n(z^2) \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} i^{n-2} z_\beta z_{\mu_1} \dots z_{\mu_n} N_j^{\alpha\mu_1 \dots \mu_n}(0), \end{aligned} \quad (19.3)$$

где индекс j относится к тем операторам из (19.2), которые имеют квантовые числа, совпадающие с квантовыми числами исходного произведения $J_p^+ J_p$. Здесь следует отметить, что взаимодействия КХД не нарушают симметрии по ароматам кварков и, следовательно, все вычисления с матрицами λ , действующими в пространстве ароматов, можно проводить так же, как в случае свободных полей. Например, для хронологического произведения двух электромагнитных токов выражение (19.3) принимает вид

$$\begin{aligned} iTJ_{em}^\mu(z) J_{em}^\nu(0) = & g^{\mu\nu} \left\{ \sum_{n \text{ четн}} \bar{C}_{1NS}^n(z^2) \left[\frac{1}{6} N_{NS,3}^{\mu_1 \dots \mu_n}(0) + \frac{1}{6\sqrt{3}} N_{NS,8}^{\mu_1 \dots \mu_n}(0) \right] \right. \\ & \left. + \frac{2}{9} \bar{C}_{1F}^n(z^2) N_F^{\mu_1 \dots \mu_n}(0) \right\} i^n z_{\mu_1} \dots z_{\mu_n} \\ & + \sum_{n \text{ четн}} \left\{ \bar{C}_{2NS}^n(z^2) \left[\frac{1}{6} N_{NS,3}^{\mu\nu\mu_1 \dots \mu_n}(0) + \frac{1}{6\sqrt{3}} N_{NS,8}^{\mu\nu\mu_1 \dots \mu_n}(0) \right] \right. \\ & \left. + \frac{2}{9} \bar{C}_{2F}^n(z^2) N_F^{\mu\nu\mu_1 \dots \mu_n}(0) \right\} i^n z_{\mu_1} \dots z_{\mu_n} \\ & + \left\{ g^{\mu\nu} \sum_{n \text{ четн}} \bar{C}_{1V}^n(z^2) \frac{2}{9} N_V^{\mu_1 \dots \mu_n}(0) \right. \\ & \left. + \sum_{n \text{ четн}} \bar{C}_{2V}^n(z^2) \frac{2}{9} N_V^{\mu\nu\mu_1 \dots \mu_n}(0) \right\} i^{n-1} z_{\mu_1} \dots z_{\mu_n}. \end{aligned} \quad (19.4)$$

Здесь использованы симметризованные выражения для операторов N . Это допустимо в данном случае, так как необходимы только диагональные матричные элементы, а членами порядка m_N^2/Q^2 пренебрегают (ср. с (18.156), (18.15в)). Выражения (19.3) и (19.4) записаны довольно схематично. При учете кварк-глюонных взаимодействий операторы, входящие в (19.3) и (19.4), подвергаются перенормировке. Помимо прочих эффектов это приводит к двум весьма важным следствиям. Во-первых поскольку операторы N_F и N_V обладают одинаковыми квантовыми числами (они являются синглетами по группе аромата), выражения для перенормированных операторов N_F и N_V представляют собой комбинации, содержащие неперенормированные операторы обоих типов. Этого не происходит для операторов N_{NS} , которые при проведении процедуры перенормировок оказываются выраженными через себя же. Во-вторых, после перенормировки появляется зависимость коэффициентов C и операторов N от размерного параметра, который мы временно обозначим буквой μ , чтобы не путать его с бьеркеновской переменной $v = p \cdot q$.

Токи J , имеющие вид

$$J^\mu(x) = aV^\mu(x) + bA^\mu(x), \quad (19.5)$$

не требуют проведения специальной перенормировки, так как операторы V и A являются сохраняющимися или квазисохраняющимися (см. § 13). Но операторы N и вильсоновские коэффициенты разложения C требуют перенормировки, за исключением некоторых особых случаев.

Перенормировка несинглетных операторов, выражающихся при этом через самих себя, сводится к добавлению перенормировочного множителя¹⁾:

$$N_{NS,a\pm}^{\mu_1 \dots \mu_n} = Z_{n-2}^{a\pm}(\mu) N_{NS,a\pm}^{\mu_1 \dots \mu_n}. \quad (19.6 \text{ а})$$

В действительности множитель Z не зависит от a^\pm .

Для синглетных операторов результат проведения перенормировочной процедуры записывается в матричном виде:

$$\vec{N}_R^{\mu_1 \dots \mu_n} = Z_{n-2} \vec{N}^{\mu_1 \dots \mu_n}. \quad (19.6 \text{ б})$$

Здесь введены вектор

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} N_F \\ N_V \end{pmatrix}, \quad (19.6 \text{ в})$$

¹⁾ Заметим, что, так же как в § 13, кварковые и глюонные поля, входящие в операторы N_{NS} и N , предполагаются перенормированными.

и матрица

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} Z_{FF} & Z_{FV} \\ Z_{VF} & Z_{VV} \end{pmatrix}. \quad (19.6 \text{ г})$$

Аномальные размерности и матрицы аномальной размерности для операторов N определены выражениями

$$\gamma_{NS}(n, g) = -(Z_n(\mu))^{-1} \frac{\mu \partial}{\partial \mu} Z_n(\mu), \quad (19.7)$$

$$\gamma(n, g) = -(Z_n(\mu))^{-1} \frac{\mu \partial}{\partial \mu} Z_n(\mu),$$

которые можно разложить в ряды по степеням константы связи:

$$\gamma_{NS}(n, g) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{NS}^{(k)}(n) \left(\frac{g^2}{16\pi^2} \right)^{k+1}, \quad (19.8)$$

$$\gamma(n, g) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^{(k)}(n) \left(\frac{g^2}{16\pi^2} \right)^{k+1}.$$

Мы вернемся к этому вопросу несколько ниже, а сейчас обратимся к формальному аппарату теории. Рассмотрим импульсное пространство, в котором запишем слагаемые, фигурирующие в операторном разложении и дающие ненулевой вклад в несинглетную часть структурной функции f_2 (т.е. в часть структурной функции f_2 , содержащую несинглетные операторы). Выбирая соответствующие слагаемые в выражении (19.3), получаем

$$i \int d^4 z e^{iq \cdot z} T J^\mu(z) J^\nu(0) \Big|_{p^\mu p^\nu}^{NS} = \sum_n \int d^4 z e^{iq \cdot z} \bar{C}_{2NS}^n(z^2) i^n z_{\mu_1} \dots z_{\mu_n} N_{NS}^{\mu\nu\mu_1 \dots \mu_n}(0). \quad (19.9)$$

Если взять матричный элемент, фигурирующий в формулах для процессов глубоконеупругого рассеяния (например, в (17.8а)), то получим

$$\frac{p^\mu p^\nu}{\nu} T_{2NS} = (2\pi)^3 \int d^4 z e^{iq \cdot z} \bar{C}_{2NS}^n(z^2) i^n z_{\mu_1} \dots z_{\mu_n} \langle p | N_{NS}^{\mu\nu\mu_1 \dots \mu_n}(0) | p \rangle. \quad (19.10)$$

С точностью до членов, содержащих свертки, матричный элемент $\langle p | N_{NS} | p \rangle$ можно записать в виде

$$i \langle p | N_{NS}^{\mu\nu\mu_1 \dots \mu_n}(0) | p \rangle = p^\mu p^\nu p^{\mu_1} \dots p^{\mu_n} \bar{A}_{NS}^n \quad (19.11)$$

и произвести следующую замену:

$$z_{\mu_1} \dots z_{\mu_n} \rightarrow (-i)^n \frac{\partial}{\partial q_{\mu_1}} \dots \frac{\partial}{\partial q_{\mu_n}} = (-2i)^n q_{\mu_1} \dots q_{\mu_n} \left(\frac{\partial}{\partial q^2} \right)^n + \text{члены, содержащие свертки.} \quad (19.12)$$

Таким образом, выражение (19.10) принимает вид

$$\begin{aligned} T_{2NS}(x, Q^2; g, \mu) &= (2\pi)^3 \nu \sum_{n \text{ четн}} 2^n \bar{A}_{NS}^n \left(\frac{\partial}{\partial q^2} \right)^n \int d^4 z e^{iq \cdot z} \frac{1}{i} \bar{C}_{2NS}^n(z^2) (q \cdot p)^n \\ &= \frac{1}{2} (2\pi)^3 \sum_{n \text{ четн}} (2\nu)^{n+1} \bar{A}_{NS}^n \left(\frac{\partial}{\partial q^2} \right)^n \int d^4 z e^{iq \cdot z} \frac{1}{i} \bar{C}_{2NS}^n(z^2). \end{aligned} \quad (19.13)$$

Известно, что в случае свободных полей коэффициенты $\bar{C}_{2NS}^n(z^2)$ обладают следующим поведением (см. § 18):

$$i \bar{C}_{2NS}^n(z^2)|_{g=0} = \frac{1}{z^2 \rightarrow 0} \frac{1}{\pi^2(z^2 - i0)}. \quad (19.14)$$

Поэтому в импульсном пространстве введем новые коэффициенты

$$C_{2NS}^n(Q^2/\mu^2, g^2/4\pi) \equiv 4(Q^2)^{n+1} \left(\frac{\partial}{\partial q^2} \right)^n \int d^4 z e^{iq \cdot z} \frac{1}{i} \bar{C}_{2NS}^n(z^2). \quad (19.15)$$

В результате получим следующее окончательное выражение:

$$T_{2NS}(x, Q^2; g, \mu) = 2 \sum \frac{1}{x^{n+1}} A_{NS}^n C_{2NS}^n(Q^2/\mu^2, g^2/4\pi); \quad A \equiv (2\pi)^3 \bar{A}. \quad (19.16)$$

Как будет показано ниже, асимптотическая свобода КХД позволяет вычислить вильсоновские коэффициенты C , входящие в выражение (19.16). Но в общем случае коэффициенты A представляют собой неизвестные константы. Чтобы получить из выражения (19.16) физическую информацию, необходимо иметь возможность выделять вклады отдельных слагаемых в этом выражении. Этого можно добиться, используя известные аналитические свойства величины T и записав дисперсионное соотношение¹⁾ для T_2 по переменной ν при фиксированном зна-

¹⁾ В принципе при записи дисперсионных соотношений необходимо вычесть содержащиеся в них расходимости. Однако, как легко видеть, при условии сходимости выражения (19.19) это требование не вносит каких-либо изменений в изложенную здесь схему. О дисперсионных соотношениях см., например, в книге [104].

чении Q^2 :

$$T_{2NS}(x, Q^2; g, \mu) = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{Q^2/2}^{\infty} \frac{dv'}{v' - \nu} \operatorname{Im} T_{2NS} \left(\frac{Q^2}{2\nu'}, Q^2; g, \mu \right) - \int_{-\infty}^{-Q^2/2} \frac{dv'}{v' - \nu} \operatorname{Im} T_{2NS} \left(\frac{Q^2}{2\nu'}, Q^2; g, \mu \right) \right\}. \quad (19.17)$$

Это соотношение можно связать с физическими структурными функциями только в том случае, если оно обладает определенной четностью по отношению к замене $q \rightarrow -q$, т.е. является либо четной, либо нечетной функцией переменной q . Таким поведением величина T_2 обладает, например, в процессах электророжения. В этом случае она является четной функцией переменной x , т.е. $T_2(x, \dots) = T_2(-x, \dots)$. Производя замену переменных $\nu' \rightarrow x' = Q^2/2\nu'$, перепишем соотношение (19.17) в виде

$$T_{2NS}(x, Q^2; g, \mu) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{dx'}{x'(1 - x'^2/x^2)} \operatorname{Im} T_{2NS}(x', Q^2; g, \mu).$$

Разложив в ряд по степеням x'/x , получим [77]

$$T_{2NS}(x, Q^2; g, \mu) = 2 \sum_n \frac{1}{x^n} \mu_{2NS}(n+1, Q^2; g, \mu), \quad (19.18)$$

где моменты μ_{2NS} определены соотношениями

$$\mu_{2NS}(n, Q^2; g, \mu^2) = \int_0^1 dx' x'^{n-2} f_{2NS}(x', Q^2; g, \nu), \quad (19.19)$$

сравнивая которые с (19.16), сразу получаем выражение для моментов

$$\mu_{2NS}(n, Q^2; g, \mu^2) = A_{NS}^n C_{2NS}^n (Q^2/\mu^2, g^2/4\pi). \quad (19.20)$$

Следует помнить, что выражения (19.19) и (19.20) получены в предположении четности функции T ; в противном случае интеграл $\int_0^1 dx'$ нельзя заменить интегралом $\int_0^1 dx'$. Следовательно, выражения (19.19) и (19.20) справедливы только для четных значений n , если функция T четная (как это имеет место в случае электророжения), или для нечетных значений n , если функция T нечетная (как, например, функция T_3 в формулах, описывающих процессы рассеяния нейтрино). Соответствующие выражения для других значений n приходится получать методом аналитического продолжения (Редже — Карлсона). Эта процедура тривиальна, если ограничиться вычислениями только ведущих вкладов (см. § 20), но содержит ряд тонкостей при проведении

вычислений во втором порядке теории возмущений. Еще одна особенность заключается в том, что, как уже отмечалось выше, приходится ограничиваться такими значениями n , при которых выражение (19.19) сходится. Исходя из теории Редже, можно ожидать, что такая сходимость имеет место по крайней мере при $\text{Re } n \geq 1$ для несинглетных величин и при $\text{Re } n \geq 2$ для синглетных величин (см. также § 23, п. 2).

§ 20. Ренормгрупповой анализ; уравнения КХД для моментов

Запишем ренормгрупповые уравнения для моментов. Так как моменты выражаются в виде интегралов от структурных функций, то они представляют собой физически наблюдаемые величины и, следовательно, не зависят от выбора точки нормировки. Из уравнений (19.6), (19.11) и (19.20) следует, что перенормировочная константа для вильсоновского коэффициента C точно равна обратной величине перенормировочной константы для операторов N_R . Таким образом, мы получаем уравнение Каллана – Симанзика

$$\left\{ \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g)g \frac{\partial}{\partial g} - \gamma_{NS}(g, n) \right\} C_{2NS}^n(Q^2/\mu^2, g^2/4\pi) = 0, \quad (20.1)$$

решение которого имеет вид

$$C_{2NS}^n(Q^2/\mu^2, g^2/4\pi) = e^{-\int_0^t d \log(Q'/\mu) \gamma_{NS}(g(Q'^2), n)} C_{2NS}^n[1, \alpha_s(Q^2)],$$

$$t = \frac{1}{2} \log Q^2/\mu^2. \quad (20.2)$$

Для синглетных операторов имеются некоторые дополнительные усложнения, обусловленные тем, что возникает система связанных уравнений. Необходимо ввести дополнительную структурную функцию $f_V(x, Q^2)$, физический смысл которой состоит в том, что она описывает распределение глюонов в нуклоне. Используя векторные обозначения

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} f_F \\ f_V \end{pmatrix}, \quad \vec{C}^n = \begin{pmatrix} C_F^n \\ C_V^n \end{pmatrix}, \quad \vec{\mu}_2(n, Q^2) = \int_0^1 dx x^{n-2} \vec{f}_2(x, Q^2), \quad (20.3)$$

аналог выражения (20.2) для синглетного случая можно записать в виде

$$\vec{C}_2^n(Q^2/\mu^2, g^2/4\pi) = T e^{-\int_0^t d \log(Q'/\mu) \gamma(g(Q'^2), n)} \vec{C}_2^n(1, \alpha_s(Q^2)). \quad (20.4)$$

Здесь оператор T формально совпадает с оператором упорядочения по времени, за исключением того, что он действует на переменную $t = \frac{1}{2} \log Q^2/\mu^2$. (Подробное изложение см. в работах [157, 162].) Асимптотическая свобода КХД позволяет использовать теорию возмущений и из уравнений (20.2) и (20.4) вычислить вильсоновские коэффициенты. Но так как величины \vec{A}^n пока неизвестны, можно рассчитать лишь *характер зависимости* моментов от перемен-

ной Q^2 . Чтобы убедиться в этом, рассмотрим уравнение (20.2) в низшем порядке теории возмущений. Решение этого уравнения имеет вид

$$C_{2NS}^n(Q^2/\mu^2, g^2(\mu)/4\pi) = C_{2NS}^n(1, 0) \left(\frac{\log Q^2/\Lambda^2}{\log \mu^2/\Lambda^2} \right)^{d(n)}, \quad (20.5)$$

где аномальная размерность $d(n)$ определяется формулой

$$d(n) = -\gamma_{NS}^{(0)}(n)/2\beta_0. \quad (20.6 \text{ а})$$

Коэффициенты $C_{2NS}^n(1, 0)$ равны просто вильсоновским коэффициентам, полученным в § 18 для случая свободных полей. Неизвестные константы \bar{A}^n и μ^2 можно исключить, нормируя на заданное значение Q_0^2 , достаточно большое, чтобы константа связи $\alpha_s(Q_0^2)$ была малой и было оправданно применение теории возмущений. В результате получаем уравнения КХД, описывающие в ведущем порядке теории возмущений зависимость моментов μ от переменной Q^2 . Опуская некоторые индексы, находим решения этих уравнений: для несинглетного случая

$$\mu_{NS}(n, Q^2) = \left[\frac{\alpha_s(Q_0^2)}{\alpha_s(Q^2)} \right]^{d(n)} \mu_{NS}(n, Q_0^2) \quad (20.6 \text{ б})$$

и для синглетного случая

$$\begin{aligned} \vec{\mu}(n, Q^2) &= \left[\frac{\alpha_s(Q_0^2)}{\alpha_s(Q^2)} \right]^{D(n)} \vec{\mu}(n, Q_0^2); \\ D(n) &= -\gamma^{(0)}(n)/2\beta_0. \end{aligned} \quad (20.7)$$

Остается лишь вычислить аномальные размерности $\gamma_{NS}^{(0)}$ и $\gamma^{(0)}(n)$. Сначала нужно вывести фейнмановские правила диаграммной техники для операторов N . Они получаются прямым вычислением (см. § 42) и приведены в приложении Д. Затем надо вычислить перенормировочные константы для операторов N . Результат для синглетного случая можно найти в работе [162]. Здесь мы рассмотрим вычисление величин $N_{NS}^{\mu_1 \dots \mu_n}$, которым соответствуют диаграммы рис. 14. В фейнмановской калибровке диаграмма рис. 14, а дает

$$V_{Aij} = i^5 g^2 \int d^D k \frac{\gamma^\mu k \Delta (\Delta \cdot k)^{n-1} k \gamma^\nu (-g_{\mu\nu})}{k^4 (k-p)^2} \sum_{a,l} t_{il}^a t_{ij}^a.$$

Для того чтобы вычислить перенормировочный множитель Z , достаточно знать расходящуюся часть коэффициента при величине $(\Delta \cdot p)^{n-1} \Delta$. Будем использовать обозначение $a \stackrel{\text{eff}}{=} b$, которое означает, что величины a и b име-

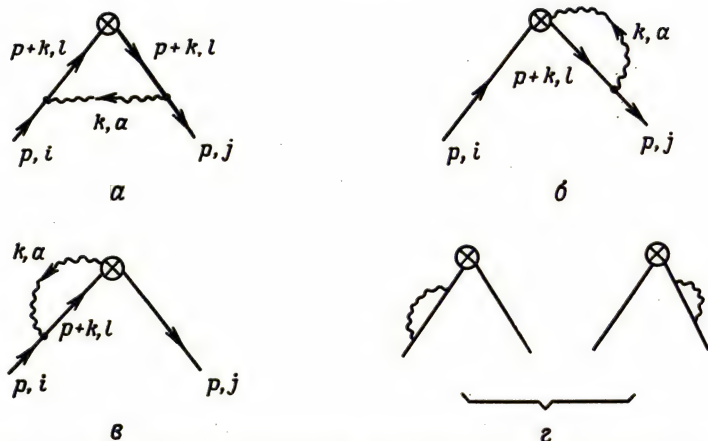


Рис. 14. Диаграммы, используемые при вычислении коэффициента Z_n^{NS} .

ют одинаковые расходящиеся части. После стандартных выкладок получаем

$$V_{Aij} = ig^2 C_F \delta_{ij} \times \int_0^1 dx (1-x) \int d^D \hat{l} \frac{-2\gamma^\alpha (\not{l} + xp) \not{\Delta} (\not{l} + xp) \gamma_\alpha [\Delta \cdot (l + xp)]^{n-1}}{(l^2 + x(1-x)p^2)^3}.$$

Расходящаяся часть члена, пропорционального величине $(\Delta \cdot p)^{n-1}$, легко выделяется и имеет вид

$$\begin{aligned} V_{Aij}^{\text{eff}} &= ig^2 \delta_{ij} C_F \int_0^1 dx (1-x) \int \frac{d^D \hat{l}}{[l^2 + x(1-x)p^2]^3} \\ &\times \left\{ -\frac{2l^2}{D} \gamma^\alpha \gamma^\beta \not{\Delta} \gamma_\beta \gamma_\alpha x^{n-1} \right\} \not{\Delta} (\Delta \cdot p)^{n-1} \\ &= \frac{g^2}{16\pi^2} N_\epsilon C_F \frac{2}{n(n+1)} (\Delta \cdot p)^{n-1} \not{\Delta} \delta_{ij}. \end{aligned} \quad (20.8)$$

Вклад диаграммы рис. 14, б описывается выражением

$$V_{Bij} = -i^3 g^2 C_F \delta_{ij} \int d^D \hat{k} \frac{\Delta^\mu \not{\Delta} \left\{ \sum_{l=0}^{n-2} (\Delta \cdot p)^l [\Delta \cdot (p+k)]^{n-l-2} (\not{p} + k) \gamma_\mu \right\}}{k^2 (k+p)^2}.$$

Здесь также необходимо найти коэффициент при величине $(\Delta \cdot p)^{n-1}$. Повторяя ту же процедуру, получаем

$$\begin{aligned}
 V_{Bij}^{\text{eff}} &= 2ig^2 C_F \delta_{ij} \Delta \int_0^1 dx \int d^D \hat{q} \frac{\sum_{l=0}^{n-2} (\Delta \cdot p)^l [\Delta \cdot q + x \Delta \cdot p]^{n-1-l}}{(q^2 + x(1-x)p^2)^2} \\
 &\stackrel{\text{eff}}{=} -2 \frac{g^2 N_c}{16\pi^2} C_F \delta_{ij} (\Delta \cdot p)^{n-1} \Delta \int_0^1 dx \sum_{l=1}^{n-1} x^l \\
 &= \frac{g^2}{16\pi^2} N_c C_F \delta_{ij} \left(-2 \sum_{l=2}^n \frac{1}{l} \right) (\Delta \cdot p)^{n-1} \Delta.
 \end{aligned} \tag{20.9}$$

Диаграмма рис. 14, *в* приводит к ответу, совпадающему с результатом (20.9) для диаграммы рис. 14, *б*. Диаграмма рис. 14, *г* приводит к результатам, эквивалентным перенормировочному коэффициенту Z_F . Чтобы вычислить теперь аномальные размерности γ_{NS} , необходимо добавить вклады от контр-членов, обеспечивающие конечность выражения $Z_n Z_F^{-1} N$. Таким образом, используя значение перенормировочного множителя Z_F , вычисленное в § 9, находим

$$Z_n^{NS} = 1 + \frac{g^2 N_c}{16\pi^2} C_F \left\{ 4S_1(n) - 3 - \frac{2}{n(n+1)} \right\}, \tag{20.10}$$

$$S_1(n) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}, \tag{20.11}$$

откуда получаем

$$\gamma_{NS}^{(0)}(n) = 2C_F \left\{ 4S_1(n) - 3 - \frac{2}{n(n+1)} \right\}, \tag{20.12}$$

$$d(n) = \frac{16}{33-2n_f} \left\{ \frac{1}{2n(n+1)} + \frac{3}{4} - S_1(n) \right\}. \tag{20.13}$$

Для синглетного случая аналогичным способом можно получить ответ, записываемый в матричном виде:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}(n) &= \frac{16}{33-2n_f} \\
 &\times \left[\begin{array}{c} \frac{33-2n_f}{16} d(n) \quad \frac{3n_f}{8} \cdot \frac{n^2+n+2}{n(n+1)(n+2)} \\ \frac{n^2+n+2}{2n(n^2-1)} \quad \frac{33-2n_f}{16} + \frac{9}{4} \left\{ \frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} - S_1(n) \right\} \end{array} \right].
 \end{aligned} \tag{20.14}$$

Выражения для величины $S_1(n)$ можно аналитически продолжить на случай комплексных значений переменной n . Согласно теореме Карлсона (см., например, [246]), существует единственное продолжение, для которого остаются справедливыми уравнения (19.19), (20.3), (20.6) и (20.7) для комплексных значений n . Оно имеет вид

$$S_1(n) = n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+n)}. \quad (20.15 \text{ а})$$

Отметим, что с определенным таким образом аналитическим продолжением на случай комплексных значений переменной n (которое совпадает с выражением (20.11) для целочисленных значений n) величину $S_1(n)$ можно представить в виде

$$S_1(n) = \psi(n+1) + \gamma_E, \\ \psi(z) \equiv \frac{d \log \Gamma(z)}{dz}. \quad (20.15 \text{ б})$$

В рассматриваемом порядке теории возмущений аналитические продолжения функции $\gamma^{(0)}(n)$ на область комплексных значений переменной n , начинающиеся с четных или нечетных значений n , совпадают. Поэтому никаких проблем, связанных с четностью или нечетностью структурных функций либо со справедливостью исходных уравнений при четных или нечетных значениях переменной n , не возникает.

§ 21. Уравнения КХД для моментов во втором порядке теории возмущений

В § 20 мы вывели уравнения КХД для моментов в ведущем порядке теории возмущений. Обратимся теперь к поправкам второго порядка.

Как видно из уравнений (20.2) и (20.4), для того чтобы вычислить поправки второго порядка, необходимо рассмотреть два различных эффекта¹⁾. Это, во-первых, эффект, связанный с учетом аномальных размерностей $\gamma_{NS}^{(1)}(n)$ и $\gamma^{(1)}(n)$ во втором порядке теории возмущений. Во-вторых, необходимо вычислить следующий член разложения вильсоновских коэффициентов:

$$C_{NS}^n(1, \alpha_s(Q^2)) = C_{NS}^n(1, 0) \left\{ 1 + C_{NS}^{n(1)}(1, 0) \frac{\alpha_s(Q^2)}{4\pi} + \dots \right\}. \quad (21.1)$$

¹⁾ Конечно, помимо использования выражения для константы связи $\alpha_s(Q^2)$ во втором порядке теории возмущений (§ 14) и учета конечных частей диаграмм первого порядка.

Вычисление аномальных размерностей для несинглетных операторов N_{NS} было выполнено в работе [125], а для синглетных — в работе [126]. Полученные результаты сформулированы в более простом аналитическом виде для несинглетных операторов в статье [150] и для синглетных — в статье [151]. Недавно они были проверены [84, 131], и лишь для коэффициента при аномальной размерности $\gamma_{VV}^{(1)}(n)$ было найдено выражение, отличающееся от полученного ранее¹⁾. Пусть величины $\gamma_{NS}^{(1)\pm}(n)$ относятся к четным (нечетным) структурным функциям. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \gamma_{NS}^{(1)\pm}(n) = & \frac{32}{9} S_1(n) \left[67 + 8 \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \right] - 64 S_1(n) S_2(n) \\ & - \frac{32}{9} [S_2(n) - S_2^{\pm}(n/2)] \left\{ 2S_1(n) - \frac{1}{n(n+1)} \right\} \\ & - \frac{128}{9} \tilde{S}^{\pm}(n) + \frac{32}{3} S_2(n) \left[\frac{3}{n(n+1)} - 7 \right] + \frac{16}{9} S_3^{\pm}\left(\frac{n}{2}\right) \\ & - 28 - 16 \frac{151n^4 + 260n^3 + 96n^2 + 3n + 10}{9n^3(n+1)^3} \\ & \pm \frac{32}{9} \cdot \frac{2n^2 + 2n + 1}{n^3(n+1)^3} + \frac{32n_f}{27} \\ & \times \left\{ 6S_2(n) - 10S_1(n) + \frac{3}{4} + \frac{11n^2 + 5n - 3}{n^2(n+1)^2} \right\}, \end{aligned} \quad (21.2 \text{ a})$$

$$S_i^{+}(x/2) = S_i(x/2), \quad S_i^{-}(x/2) = S_i\left(\frac{x-1}{2}\right), \quad (21.2 \text{ б})$$

$$\tilde{S}^{\pm}(x) = -\frac{5}{8} \zeta(3) \mp \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+x)^2} S_1(k+x).$$

Сводку формул для величин $\gamma_{ij}^{(1)}(n)$ можно найти в работе [194], где для аномальной размерности $\gamma_{VV}^{(1)}$ принят результат, полученный в работе [131].

Обратимся теперь к вильсоновским коэффициентам. Поскольку они представляют собой константы, их можно вычислить, взяв матричные элементы от хронологического произведения $TJ^{\mu}J^{\nu}$ между произвольными состояниями. Эту свободу в выборе состояний можно использовать, чтобы максимально упростить вычисления. Естественно, удобно выбрать кварковые и глюонные состояния. Следует помнить, что в отличие от аномальных размерностей вильсоновские коэффициенты зависят от рассматриваемого процесса и

¹⁾ Результаты работы [131] недавно были проверены независимым образом.

структурной функции. Сводку значений¹⁾ коэффициентов $C_{NS}^{n(1)}(1,0)$ и $\bar{C}_L^{n(1)}(1,0)$ можно найти в работах [27, 55]. Здесь мы приведем пример вычисления продольной структурной функции.

В ведущем порядке теории возмущений структурные функции f_1 и f_2 равны, и, следовательно, продольная структурная функция f_L равна нулю. Для случая свободных полей это показано в § 18. Но так как поправки ведущего порядка сводятся просто к умножению коэффициентов $C_L^n(1,0)$ на множитель $(\log Q^2/\Lambda^2)^{\delta(n)}$, где $\delta = d$ или $\delta = D$, все моменты от продольной структурной функции f_L , как и утверждалось, в этом порядке равны нулю. Это означает, что для продольной структурной функции формула (21.1) принимает вид

$$C_L^n(1, \alpha_s) = \bar{C}_L^{n(1)}(1,0) \frac{\alpha_s}{4\pi} + \dots \quad (21.3)$$

Это выражение определяет степень пертурбативного нарушения соотношения Каллана – Гросса. Его удобно представить в виде произведения двух сомножителей

$$C_{PL}^{n(1)}(1,0) = \delta_P B_L^{n(1)}, \quad (21.4)$$

один из которых зависит от рассматриваемого процесса, а другой не зависит. При этом множители δ_P имеют вид

$$\delta_{PNS} = \begin{cases} \frac{1}{6}, & \text{для } f_2^{eN} \\ 1, & \text{для } f_2^{v\pm I} \end{cases} \quad (21.5)$$

$$\delta_{PF} = \begin{cases} \frac{5}{18}, & \text{для } f_{2F}^{eN} \\ 1, & \text{для } f_2^{v\pm I}, \end{cases}$$

где индекс N принимает значения $N = p$ (протон) или n (нейтрон), а индекс I обозначает "изоскалярный" нуклон. Рассмотрим теперь продольную структурную функцию f_L^{NS} . Выражение для продольной структурной функции получается в результате вычисления диаграмм рис. 15, так как все другие диаграммы дают либо одинаковые вклады, которые сокращаются при вычислении разности $f_1 - f_2$, либо вклады только в синглетную часть²⁾. Более того, поскольку разложение продольной структурной функции f_L начинается с членов первого порядка по константе связи α_s , нет необходимости рассматривать

¹⁾ Некоторые из коэффициентов C были вычислены ранее в работах [1, 13, 63, 90, 126, 168, 181, 184, 271, 279] и др. Значения, приведенные в работах [27, 55], проверены по крайней мере двумя независимыми вычислениями.

²⁾ При вычислении синглетной части следует учитывать также диаграммы рис. 16.

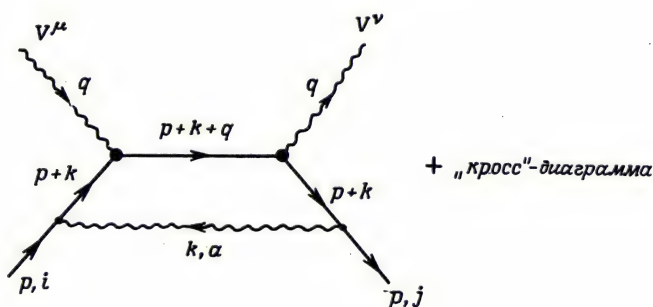


Рис. 15. Диаграмма, дающая вклад в несинглетную часть продольной структурной функции f_L .

вклад от перенормировочных множителей операторов N , которые в данном случае приводят к поправкам порядка $O(\alpha_s^2)$. Вычисления можно еще более упростить, заметив, что если в выражении для тензора $T^{\mu\nu}$ сохранить члены, пропорциональные компонентам импульса q^μ и q^ν , то продольная структурная функция будет единственной инвариантной амплитудой, пропорциональной произведению $q^\mu q^\nu$. Например, в случае векторных токов имеем

$$T^{\mu\nu} = (g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu / q^2) T_L + \left(g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu \frac{q^2}{\nu} + \frac{p^\mu q^\nu + p^\nu p^\mu}{\nu} \right) T_2,$$

$$f_L = \frac{1}{2\pi} \text{Im } T_L. \quad (21.6)$$

В общем случае вычисления следует проводить для импульсов $p^2 < 0$, чтобы можно было контролировать инфракрасные расходимости. Но это условие не является необходимым при расчете f_L , которая в рассматриваемом порядке теории возмущений остается конечной в пределе $p^2 \rightarrow 0$.

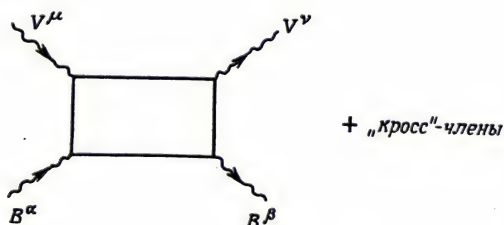


Рис. 16. Диаграмма, дающая вклад в синглетную часть продольной структурной функции f_L .

Амплитуда, соответствующая диаграмме рис. 15, имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{i}{2} (2\pi)^3 \sum_{\sigma} \int d^4 z e^{iq \cdot z} \langle p, \sigma | T J^{\mu}(z) J^{\nu}(0) | p, \sigma \rangle \\ &= \left[T'_{ij}{}^{\mu\nu} = -i C_F \delta_{ij} g^2 \frac{1}{4} \sum_{\sigma} \bar{u}(p, \sigma) \right. \\ & \quad \times \int d^D k \frac{\gamma_{\alpha}(\not{p} + k) \gamma^{\mu}(\not{p} + k + \not{q}) \gamma^{\nu}(\not{p} + k) \gamma^{\alpha}}{(p + k)^4 (p + k + q)^2 k^2} u(p, \sigma) \left. \right] \\ & \quad + \text{"кросс"-член.} \end{aligned}$$

Используя соотношение

$$\sum_{\sigma} \bar{u}(p, \sigma) \mathcal{M} u(p, \sigma) = \text{Tr}(\not{p} \mathcal{M}),$$

выделяя член, пропорциональный произведению $q^{\mu} q^{\nu}$, и вводя фейнмановские параметры, находим

$$T_L'^{NS} = \frac{g^2}{16\pi^2} C_F \frac{8}{x} \int_0^1 d\alpha \cdot \alpha \int_0^1 d\beta \frac{(1 - u_2) u_1}{[1 - u_2 - (1 - (u_1 + u_2)/x)]^2},$$

где $u_1 = \alpha\beta$ и $u_2 = 1 - \alpha$. Разлагая в ряд по степеням $1/x$ и интегрируя, получаем

$$T_L'^{NS} = \frac{g^2}{16\pi^2} 4 C_F \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{x} \right)^n.$$

Перекрестные диаграммы удваивают значения коэффициентов при четных степенях $1/x$ и приводят к сокращению членов разложения, содержащих $1/x$ в нечетной степени. Таким образом, окончательный результат имеет вид

$$T_L^{NS} = \frac{2g^2}{16\pi^2} C_F \sum_{n \text{ четн}}^{\infty} \frac{4}{n+1} \left(\frac{1}{x} \right)^n. \quad (21.7)$$

Записывая аналог выражения (19.18), находим

$$B_L^{n(1)NS} = \frac{4}{n+1} C_F, \quad n - \text{четное число},$$

$$\mu_L^{NS}(n, Q^2) = \delta_L^{NS} \frac{\alpha_s(Q^2)}{\pi} \cdot \frac{C_F}{n+1} \mu_2^{NS}(n, Q^2). \quad (21.8)$$

Детальное изложение вычислений других коэффициентов B можно найти в статье [27]. Здесь мы лишь приведем результаты для процесса электроорождения на протонной мишени:

$$\begin{aligned} C_{NS}^{(1)}(n) &= C_F^{(1)}(n) \\ &= C_F \left\{ 2[S_1(n)]^2 + 3S_1(n) - 2S_2(n) - \frac{2S_1(n)}{n(n+1)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{n} + \frac{4}{n+1} + \frac{2}{n^2} - 9 \right\}, \end{aligned} \quad (21.9 \text{ а})$$

$$C_V^{(1)}(n) = 4T_F n_f \left\{ -\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{6}{n+1} - \frac{6}{n+2} - S_1(n) \frac{n^2 + n + 2}{n(n+1)(n+2)} \right\}. \quad (21.9 \text{ б})$$

Поскольку мы объяснили общие методы, можно записать в явном виде уравнения КХД для моментов во втором порядке теории возмущений. Для несинглетного случая имеем

$$\begin{aligned} \mu_{NS}(n, Q^2) &= \left[\frac{\alpha_s(Q_0^2)}{\alpha_s(Q^2)} \right]^{d(n)} \\ &\times \frac{1 + C_{NS}^{(1)}(n)\alpha_s(Q^2)/4\pi}{1 + C_{NS}^{(1)}(n)\alpha_s(Q_0^2)/4\pi} \left\{ \frac{1 + \beta_1\alpha_s(Q^2)/4\pi\beta_0}{1 + \beta_1\alpha_s(Q_0^2)/4\pi\beta_0} \right\}^{p(n)} \\ &\times \mu_{NS}(n, Q_0^2); \\ p(n) &= \frac{1}{2} \{ \gamma_{NS}^{(1)}(n)/\beta_1 - \gamma_{NS}^{(0)}(n)/\beta_0 \}. \end{aligned} \quad (21.10)$$

Для синглетного случая возникают некоторые дополнительные трудности. Нужно начать с определения матрицы $\mathbf{C}^{(1)}(n)$, имеющей матричные элементы $C_{12}^{(1)}(n) = C_V^{(1)}(n)$, $C_{11}^{(1)}(n) = C_F^{(1)}(n)$,

$$C_{21}^{(1)}(n) = \frac{D_{21}(n)}{D_{12}(n)} C_{12}^{(1)}(n), \quad C_{22}^{(1)}(n) = C_{11}^{(1)}(n) + \frac{D_{22}(n) - D_{11}(n)}{D_{12}(n)} C_{12}^{(1)}(n).$$

Если принять такое определение, то матрицы $\mathbf{C}^{(1)}$ и \mathbf{D} коммутируют. Введем обозначения α для $\alpha_s(Q^2)$ и α_0 для $\alpha_s(Q_0^2)$. Тогда уравнения для моментов в синглетном случае принимают вид [149]

$$\vec{\mu}(n, Q^2) = \mathbf{C}(n, \alpha) \mathbf{C}^{-1}(n, \alpha_0) \mathbf{M}(n; \alpha, \alpha_0) \vec{\mu}(n, Q_0^2), \quad (21.11)$$

где введены обозначения $\mathbf{C} = 1 + \mathbf{C}^{(1)}\alpha_s/(4\pi)$,

$$\mathbf{R}(n; \alpha, \alpha_0) = 1 - \frac{\alpha - \alpha_0}{4\pi} \cdot \frac{\beta_1}{2\beta_0^2} \gamma^{(0)}(n) + \Delta(n; \alpha, \alpha_0),$$

$$\Delta(n; \alpha, \alpha_0) = \frac{-3}{32} \cdot \frac{\alpha_0}{4\pi} \int_0^r dr' e^{-3\beta_0 r'/16} [\mathbf{M}^{(0)}(n, r')]^{-1} \gamma^{(1)}(n) \mathbf{M}^{(0)}(n, r'),$$

$$\mathbf{M}(n; \alpha, \alpha_0) = \left(\frac{\alpha_0}{\alpha} \right)^{\mathbf{D}(n)} \mathbf{R}(n; \alpha, \alpha_0),$$

$$r = \frac{16}{3\beta_0} \log \frac{\alpha_0}{\alpha}, \quad \mathbf{M}^{(0)}(n, r') = e^{-3r'\gamma^{(0)}(n)/32}.$$

Уравнение для моментов в синглетном случае можно переписать в другом виде, более удобном в некоторых приложениях. Пусть матрица $\mathbf{S}(n)$ диагонализует матрицу $\mathbf{D}(n)$:

$$\mathbf{S}^{-1}(n) \mathbf{D}(n) \mathbf{S}(n) = \hat{\mathbf{D}}(n) \equiv \begin{pmatrix} d_+(n) & 0 \\ 0 & d_-(n) \end{pmatrix}, \quad d_+(n) > d_-(n).$$

Ее можно выбрать так, чтобы $\det \mathbf{S} = S_{11} = 1$; тогда матрица \mathbf{S} имеет вид

$$\mathbf{S}(n) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{D_{12}(n)}{d_-(n) - d_+(n)} \\ \frac{d_+(n) - D_{11}(n)}{D_{12}(n)} & \frac{d_-(n) - D_{11}(n)}{d_-(n) - d_+(n)} \end{pmatrix}. \quad (21.12)$$

Определим величину $\bar{\gamma}$ как результат преобразования матрицы $\gamma^{(1)}$ под действием матрицы \mathbf{S} :

$$\mathbf{S}^{-1}(n) \gamma^{(1)}(n) \mathbf{S}(n) = \bar{\gamma}(n). \quad (21.13)$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} \alpha^{\hat{\mathbf{D}}(n)} \left\{ 1 + \frac{\alpha}{4\pi} \Gamma(n) \right\} \mathbf{S}^{-1}(n) \mathbf{C}^{-1}(n, \alpha) \vec{\mu}(n, Q^2) \\ = \alpha_0^{\hat{\mathbf{D}}(n)} \left\{ 1 + \frac{\alpha_0}{4\pi} \Gamma(n) \right\} \mathbf{S}^{-1}(n) \mathbf{C}^{-1}(n, \alpha_0) \vec{\mu}(n, Q_0^2) \\ \equiv \vec{b}(n) \text{ (не зависит от } Q^2). \end{aligned} \quad (21.14)$$

Здесь использовано обозначение¹⁾

$$\Gamma(n) = \frac{-1}{2\beta_0} \begin{pmatrix} \bar{\gamma}_{11}(n) + 2\beta_1 d_+(n) & \frac{\bar{\gamma}_{12}(n)}{d_+(n) - d_-(n) + 1} \\ \frac{\bar{\gamma}_{21}(n)}{d_-(n) - d_+(n) + 1} & \bar{\gamma}_{22}(n) + 2\beta_1 d_-(n) \end{pmatrix}.$$

¹⁾ Уравнения несколько изменяются для двух значений n_{\pm} , для которых выполняется соотношение $d_-(n_{\pm}) - d_+(n_{\pm}) + 1 = 0$. При этом поправки следующего порядка теории возмущений равны не $O(\alpha_s)$, а $O(\alpha_s \log \alpha_s)$.

Выражения (21.10) и (21.11) применимы для моментов структурных функций f_2 и f_3 . Используя соотношения (21.8), продольную структурную функцию f_L можно выразить через функцию f_2 :

$$f_L = f_L^{NS} + f_L^F + f_L^V, \quad (21.15 \text{ а})$$

$$f_L^{NS}(x, Q^2) = \frac{4\alpha_s}{3\pi} \int_x^1 dy \frac{x^2}{y^3} f_2^{NS}(y, Q^2), \quad (21.15 \text{ б})$$

$$f_L^F(x, Q^2) = \frac{4\alpha_s}{3\pi} \int_x^1 dy \frac{x^2}{y^3} f_2^F(y, Q^2), \quad (21.15 \text{ в})$$

$$f_L^V(x, Q^2) = \frac{4\alpha_s}{3\pi} \delta_L \int_x^1 dy \frac{x^2}{y^3} \left(1 - \frac{x}{y}\right) f_2^V(y, Q^2), \quad (21.15 \text{ г})$$

где для процесса электроорождения на протонной мишени

$$\delta_L = \frac{3n_f}{2}. \quad (21.16)$$

§ 22. Метод Алтарелли — Паризи

Метод операторного разложения в применении к анализу процессов глубоконеупругого рассеяния является достаточно простым и вполне строгим. Однако он, по-видимому, не опирается на физическую интуицию. В частности, не совсем ясна его связь с партонной моделью. Это является одной из причин, обусловивших успех метода Алтарелли — Паризи ([12], см. также [98]), в рамках которого такая связь сохраняется на каждом этапе.

Прежде чем обсуждать партонную интерпретацию, проанализируем еще раз полученные уравнения. Для определенности будем рассматривать несинглетную часть структурной функции $f_2(x, Q^2)$, а именно сосредоточим внимание на вкладе кварка заданного аромата f в выражения для f_2^{NS} и функции q_f . В приближении свободных партонов (см. (17.11)) функция распределения q_f не зависит от квадрата 4-импульса Q^2 , но при учете взаимодействия она такую зависимость приобретает. Если через μ^2 обозначить некоторое фиксированное характерное значение квадрата 4-импульса и переменную t определить формулой $t = \frac{1}{2} \log(Q^2/\mu^2)$, то выражение (17.11) можно обобщить следующим образом:

$$f_2^{NS}(x, Q^2) = \sum \delta_f^{NS} x q_f(x, t), \quad (22.1)$$

где коэффициенты δ_f известны.

Уравнения квантовой хромодинамики позволяют выяснить изменение моментов в зависимости от переменной t . Запишем выражение (20.6) для функ-

ции распределения q_f в дифференциальном виде:

$$\frac{d\tilde{q}_f(n, t)}{dt} = \frac{\gamma_{NS}^{(0)}(n) \alpha_g(t)}{4\pi} \tilde{q}_f(n, t), \quad (22.2)$$

здесь использовано выражение (14.3), в котором параметр ν заменен на μ , и введены моменты

$$\tilde{q}_f(n, t) = \int_0^1 dx x^{n-1} q_f(x, t). \quad (22.3)$$

Конечно, выражения (22.1) – (22.3) полностью эквивалентны (20.6). Выполним теперь преобразование, обратное преобразованию Меллина (22.3). Если функцию $P_{NS}^{(0)}(z)$ определить соотношением

$$\int_0^1 dz z^{n-1} P_{NS}^{(0)}(z) = \gamma_{NS}^{(0)}(n), \quad (22.4 \text{ а})$$

то из теоремы о свертках¹⁾ следует

$$\frac{dq_f(x, t)}{dt} = \frac{\alpha_g(t)}{4\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} q_f(y, t) P_{NS}^{(0)}\left(\frac{x}{y}\right). \quad (22.4 \text{ б})$$

Это так называемое уравнение Алтарелли – Паризи. Его можно записать в инфинитезимальном виде:

$$\begin{aligned} q_f(x, t) + dq_f(x, t) = \int_0^1 dy \int_0^1 dz \delta(zy - x) q_f(y, t) \\ \times \left\{ \delta(z - 1) + \frac{\alpha_g(t)}{4\pi} P_{NS}^{(0)}(z) dt \right\}. \end{aligned} \quad (22.5)$$

Мы видим, что функцию $P_{NS}^{(0)}(z)$ можно рассматривать как величину, определяющую скорость изменения вероятности распределения партонов с изменением переменной t . Но ниже мы дадим более интересную интерпретацию этой характеристики.

Рассмотрим процесс рассеяния пробной виртуальной частицы (скажем, фотона) на партоне. В рамках партонной модели предполагается, что кварки являются свободными частицами и обладают определенной вероятностью $q_f(x)$ иметь долю x полного импульса протона. Примем теперь, что эта вероятность зависит также от переменной t . Такая зависимость обусловлена

¹⁾ Эту теорему нетрудно доказать, проводя замену переменной $z \rightarrow \log z = \zeta$ и используя теорему о свертках для преобразования Лапласа. Можно также проинтегрировать уравнение (22.5) и получить (22.2).

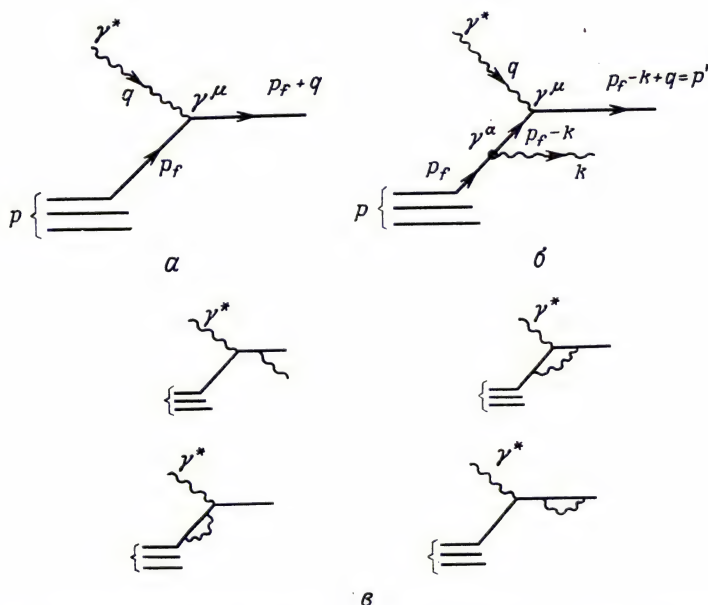


Рис. 17. Элементарные процессы, дающие вклад в процесс $\gamma^* + p \rightarrow$ любые допустимые частицы.

тем, что кварк может испускать глюоны (рис. 17). Использование аксиальной калибровки сильно упрощает вычисления, так как при этом нужно учитывать вклад только диаграммы рис. 17, б (только эта диаграмма приводит к зависимости от t). Более того, можно учесть все асимптотически свободные поправки, если заменить $g^2/(4\pi)$ величиной α_s ¹⁾. Поэтому мы будем использовать аксиальную калибровку.

В низшем порядке теории возмущений по константе связи g нужно рассмотреть только диаграмму рис. 17, а. Будем считать кварки безмассовыми и перейдем в систему бесконечного импульса, определяемую соотношениями

$$q = (0, \mathbf{0}, -Q), \quad p = \frac{Q}{2x} (1, \mathbf{0}, q),$$

где $\mathbf{0}$ — нулевой вектор, лежащий в плоскости xu . Структурная функция f_2 фактически представляет собой сечение этого процесса и, как показано в

¹⁾ Это легко понять, вспомнив вывод выражения (5.18) и сравнив его с выражениями (9.29) и (9.30): весь вклад в перенормировочный множитель Z_g в рассматриваемой калибровке обусловлен глюонным пропагатором.

§ 17, выражается в виде суммы сечений рассеяния фотона на точечном кварке, взвешенных с функциями распределения q_f . Проводя очевидные изменения обозначений и вводя величину w , пропорциональную сечению рассеяния фотона на точечном кварке, получаем

$$\frac{1}{x} f_2^{NS}(x, t) = \sum \delta_f^{NS} \int_0^1 \frac{dy}{y} q_f(y, t) w_{\text{точечн}}(p_f, q). \quad (22.6)$$

Происхождение каждого члена в (22.6) очевидно. Переменная y определена соотношением $p_f = y p$. Но ввиду безмассовости кварков имеем $(p_f + q)^2 = 0$, а следовательно,

$$w_{\text{точечн}}(p_f, q) = \delta(y/x - 1).$$

Как и следовало ожидать, при этом воспроизводится результат (22.1) для структурной функции f_2 . Перепишем тождественно уравнение (22.6) в виде

$$q_f(x, t) = \int_0^1 \frac{dy}{y} \delta(y/x - 1) q_f(x, t). \quad (22.7)$$

Конечно, уравнение (22.7) справедливо только в нулевом порядке теории возмущений по константе связи g (модель свободных партонов). Вследствие взаимодействия кварков и глюонов в это уравнение должны быть введены поправки. Их можно разделить на две группы. Первую группу составляют радиационные поправки к вершине взаимодействия фотона с кварком и к кварковому пропагатору на рис. 17, а. Эти поправки описываются диаграммами рис. 17, в. Вторую группу составляют поправки, обусловленные возможностью испускания кварком реального глюона (рис. 17, б). Рассмотрим сначала поправки второго типа. Амплитуда процесса излучения кварком реального глюона имеет вид ¹⁾

$$\mathcal{A}^\mu = (2\pi)^{-2} \bar{u}(p_f - k + q, \sigma') \gamma^\mu \frac{i}{\not{p}_f - k} i\gamma^a g t_{ij}^a u(p_f, \sigma) \epsilon_a^*(k, \lambda).$$

Следовательно, вероятность этого процесса пропорциональна тензору

$$\begin{aligned} w^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \int \frac{d\vec{k}}{2k^0} \cdot \frac{d\vec{p}'}{2p'^0} \delta(p_f + q - k - p') \sum_{\text{spins}} \mathcal{A}^{\mu*} \mathcal{A}^\nu \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\sigma, \sigma', \lambda} \sum_{a, j} \int d^4k \theta(k^0) \\ &\quad \times \delta(k^2) \theta(p_f^0 - k^0 + q^0) \delta[(p_f - k + q)^2] \mathcal{A}^{\mu*} \mathcal{A}^\nu. \end{aligned}$$

¹⁾ Это выражение нормировано таким образом, что в том случае, если бы фотон γ^* был реальным, амплитуда рассеяния удовлетворяла бы условию $F(\gamma^* + q \rightarrow G + q^*) = \epsilon_\mu \hat{1}^\mu$.

Заметим еще раз, что испускается реальный глюон, поэтому следует использовать соотношение

$$\sum_{\lambda} \epsilon_{\alpha}(k, \lambda) \epsilon_{\beta}^{*}(k, \lambda) = -g_{\alpha\beta} + \frac{k_{\alpha} u_{\beta} + k_{\beta} u_{\alpha}}{k \cdot n},$$

где применена светоподобная калибровка

$$k \cdot \epsilon = u \cdot \epsilon = 0, \quad u^2 = 0.$$

Учитывая эти выражения и вводя обозначение $\delta_{+}(v^2) = \delta(v^2) \theta(v^0)$, получаем

$$w^{\mu\nu} = \frac{1}{2(2\pi)^2} g^2 C_F \Phi^{\mu\nu}, \quad (22.8 \text{ а})$$

$$\begin{aligned} \Phi^{\mu\nu} = & \int d^4k \delta_{+}(k^2) \delta_{+}[(p_f - k + q)^2] \left(-g_{\alpha\beta} + \frac{k_{\alpha} u_{\beta} + k_{\beta} u_{\alpha}}{k \cdot u} \right) \\ & \times \frac{\text{Tr}(p_f - k) \gamma^{\mu} (p_f - k + q) \gamma^{\nu} (p_f - k) \gamma^{\beta} p_f \gamma^{\alpha}}{(p_f - k)^4}. \end{aligned} \quad (22.8 \text{ б})$$

В случае безмассовых кварков и глюонов выражения (22.8) оказываются расходящимися, и их следует регуляризовать. Для этого можно использовать размерную регуляризацию, но проще считать исходный кварк виртуальным: $p_f^2 = -\mu^2$. Благодаря компактности области интегрирования при этом может возникнуть только логарифмически расходящийся член, который, как будет показано ниже, имеет вид $\log(Q^2/\mu^2)$. На самом деле, только этот логарифмический член нас и интересует; это существенно облегчает вычисления.

Прежде всего в выражениях (22.8) всюду, за исключением знаменателя, можно положить $p_f^2 = 0$; поправки будут иметь величину $O(\mu^2/Q^2)$. Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} & \left(-g_{\alpha\beta} + \frac{k_{\alpha} u_{\beta} + k_{\beta} u_{\alpha}}{k \cdot u} \right) \text{Tr}(p_f - k) \gamma^{\mu} (p_f - k + q) \gamma^{\nu} (p_f - k) \gamma^{\beta} p_f \gamma^{\alpha} \\ & = -2(p_f - k)^2 \left\{ \text{Tr} \gamma^{\mu} (p_f - k + q) \gamma^{\nu} k + \text{Tr} \gamma^{\mu} (p_f - k + q) \gamma^{\nu} \right. \\ & \quad \left. \times [(p \cdot u)(p_f - k) + (p_f - k) \cdot u p + 2k \cdot p_f] \frac{1}{u \cdot k} \right\}. \end{aligned}$$

Так как $p_f^2 = k^2 = 0$, выполняется равенство $2k p_f = -(p_f - k)^2$. Следовательно, последний член в полученном уравнении пропорционален $(p_f - k)^4$ и не дает вклада в логарифмический член. Используя обозначения $\stackrel{\text{лог}}{=}$, которое означает, что логарифмические члены в левой и правой частях уравне-

ния равны, получаем

$$\begin{aligned} \Phi^{\mu\nu \log} = & -2 \int \frac{d\vec{k}}{2k^0} \delta + [(p_f - k + q)^2] \frac{1}{(p_f - k)^2} \\ & \times \text{Tr} \{ \gamma^\mu (\not{p}_f - \not{k} + \not{q}) \gamma^\nu \not{k} + \gamma^\mu (\not{p}_f - \not{k} + \not{q}) \gamma^\nu \\ & \times [(\not{p}_f - \not{k})(p_f \cdot u / k \cdot u) + \not{p}_f [(p_f - k) \cdot u / k \cdot u]] \} . \end{aligned} \quad (22.9)$$

Запишем теперь знаменатель выражения (22.9) в виде

$$(p_f - k)^2 = -\mu^2 - 2k^0 p_f^0 + 2k^3 p_f^3 \cos \theta.$$

Он обращается в нуль только при условии $\cos \theta = 1$, т.е. в случае коллинеарности векторов k и p_f . (Это условие определяет также глюоны, приводящие к поправкам к явлению скейлинга.) Таким образом, во всех других случаях можно положить $\cos \theta = 1$, так что, в частности, δ -функция в выражении (22.9) принимает вид

$$\delta[(p_f - k + q)^2] = \delta(2\nu - Q^2 - 2Qk^0) = \delta\left[2\nu\left(1 - x - \frac{Qk^0}{\nu}\right)\right].$$

Удобно ввести обозначение

$$1 - \frac{Qk^0}{\nu} \equiv \rho, \quad (22.10)$$

и записать δ -функцию в виде

$$\delta[(p_f - k + q)^2] = \frac{1}{2\nu} \delta(\rho - x).$$

Кроме того, мы видим, что в случае $\cos \theta = 1$ выполнено условие

$$k_{\theta=0,\pi} = (1 - \rho) p_f.$$

Теперь легко завершить вычисление выражений (22.8):

$$\begin{aligned} \Phi^{\mu\nu \log} = & -2\pi \int_{-1}^{+1} d\cos \theta \int_0^\infty \frac{dk^0 \cdot k^0}{2} \cdot \frac{1}{\nu} \delta(\rho - x) \frac{1 + \rho^2}{1 - \rho} \\ & \times \frac{\text{Tr} \gamma^\mu (\rho \not{p}_f + \not{q}) \gamma^\nu \not{p}_f}{2k^0 p_f^0 \cos \theta - (\mu^2 + 2k^0 p_f^0)} \\ = & \left(\log \frac{Q^2}{\mu^2} \right) \frac{\pi}{2\nu} \int d\rho \frac{1 + \rho^2}{1 - \rho} \text{Tr} \{ \gamma^\mu (\rho \not{p}_f + \not{q}) \gamma^\nu \not{p}_f \} \delta(x - \rho). \end{aligned}$$

Таким образом, для структурной функции f_2 получаем следующий результат (обозначения очевидны):

$$w_2 = 4C_F \frac{g^2}{16\pi^2} \int d\rho \frac{1+\rho^2}{1-\rho} \rho \delta(x-\rho) \log \frac{Q^2}{\mu^2}. \quad (22.11)$$

Выражение (22.11) не дает окончательного ответа, так как оно не определено при $\rho = 1$. Эта неопределенность обусловлена глюонами нулевой энергии, которые приводят к характерной инфракрасной расходимости. В действительности можно убедиться в том, что эта расходимость точно сокращается радиационными поправками к вершине и пропагатору, которые мы еще не приняли во внимание. Так как реальный глюон при этом не испускается, вклад таких поправок в выражение для w_2 должен быть аналогичен (22.11) с точностью до замены $(1+\rho^2)/(1-\rho)$ на $\lambda \delta(\rho-1)$. Суммируя все члены, получаем

$$w_2 = \frac{C_2(F) \alpha_g \log Q^2 / \mu^2}{\pi} \int d\rho \rho \delta(x-\rho) \left\{ \frac{1+\rho^2}{1-\rho} + \lambda \delta(1-\rho) \right\}. \quad (22.12)$$

Таким образом, определена искомая поправка к уравнению (22.7), которая имеет вид¹⁾

$$q_f(x, t) = \int_0^1 dy \int_0^1 dz \delta(zy-1) q_f(y, t) \left\{ \delta(z-1) + \frac{\alpha_g t}{4\pi} P_{NS}^{(0)}(z) \right\}, \quad (22.13 \text{ а})$$

$$P_{NS}^{(0)}(z) = C_F \left\{ 3\delta(1-z) - 2 \frac{1+z^2}{(1-z)_+} \right\},$$

где для любой функции φ введено определение

$$\int_0^1 dz \frac{1}{(1-z)_+} \varphi(z) \equiv \int_0^1 dz \frac{\varphi(z) - \varphi(1)}{1-z}. \quad (22.13 \text{ б})$$

Заметим, что если эти коэффициенты $P_{NS}^{(0)}$ идентифицировать с полученными ранее коэффициентами, то можно проверить, что они действительно удовлетворяют уравнению (22.4). Именно благодаря этому нет необходимости вычислять коэффициент λ при $\delta(\rho-1)$; он непосредственно фиксируется условием $\gamma_{NS}^{(0)}(1) = 0$ (или условием $\det \gamma^{(0)}(2) = 0$ для синглетного случая).

Теперь можно сравнить выражения (22.13) и (22.5). Фактически достаточно считать константу g определенной в точке $-\mu^2$ и заменить перемен-

¹⁾ В выражениях (22.13а), (22.13б) уже учтено правильное значение параметра λ .

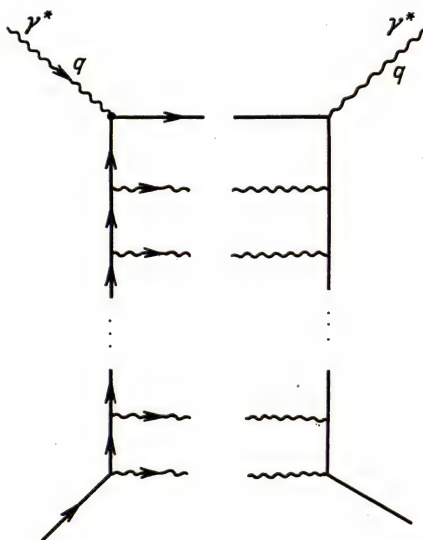


Рис. 18. Лестничная диаграмма для несинглетного или фермионного рассеяния.

ную t дифференциалом dt , чтобы записать выражения (22.13) в инфинитезимальном виде.

Но существует и более интересный метод. Предположим, что может быть действительно испущено произвольное число глюонов. Тогда нужно просуммировать все диаграммы, содержащие глюон в конечном состоянии. Эта задача, конечно, неразрешима. Но она сильно упрощается, если ограничиться рассмотрением только *ведущих логарифмических* членов. Можно показать [155], что в этом случае дают вклад только лестничные диаграммы (рис. 18). Оказывается, что эти диаграммы можно вычислить и даже просуммировать. Таким образом, мы воспроизведем результаты стандартных вычислений, получив при этом два преимущества. Во-первых, очевидно, что использование ведущего приближения по бегущей константе связи эквивалентно суммированию всех ведущих логарифмических членов по константе $\alpha_g \propto \alpha_g^n \log^n(Q^2/\mu^2)$. Во-вторых, такое рассмотрение дает некоторые указания, как рассчитывать те процессы, для которых метод операторного разложения неприменим. Мы не будем углубляться в изучение этого вопроса, а сошлемся на книгу [226] и цитированную в ней литературу.

Во втором порядке теории возмущений ядра рассмотренных уравнений были вычислены в работах [84, 131].

Метод Алтарелли — Паризи позволяет представить структурные функции для различных процессов в виде сумм "плотностей распределения кварков"

$q(x, Q^2)$, описывающих распределение кварков аромата q . Для упрощения последующих ссылок ниже приводятся выражения для структурных функций некоторых наиболее важных процессов. Обозначим через I изоскалярную мишень, а через p — протонную мишень. Тогда имеем

$$\left. \begin{aligned} f_{2ep}^F &= \begin{cases} \frac{2}{9} x(u + \bar{u} + d + \bar{d} + s + \bar{s}), & n_f = 3 \\ \frac{5}{18} x(u + \bar{u} + d + \bar{d} + s + \bar{s} + c + \bar{c}), & n_f = 4; \end{cases} \\ f_{2ep}^{NS} &= \begin{cases} \frac{1}{3} x\left(\frac{2}{3}u - \frac{1}{3}d - \frac{1}{3}s + \frac{2}{3}\bar{u} - \frac{1}{3}\bar{d} - \frac{1}{3}\bar{s}\right), & n_f = 3 \\ \frac{1}{6} x(u - d - s + \bar{u} - \bar{d} - \bar{s} + c + \bar{c}), & n_f = 4 \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (22.14 \text{ а})$$

$$f_{2el}^F = f_{2ep}^F; \quad f_{2el}^{NS} = \begin{cases} \frac{1}{18} x(u + \bar{u} + d + \bar{d} - 2s - 2\bar{s}), & n_f = 3 \\ \frac{1}{6} x(c - s + \bar{c} - \bar{s}), & n_f = 4. \end{cases} \quad (22.14 \text{ б})$$

$$f_{2\nu l}^{NS} = 0, \quad f_{2\nu l}^F = f_{2\nu l}^F = \begin{cases} \frac{9}{2} f_{2ep}^F, & n_f = 3 \\ \frac{18}{5} f_{2ep}^F, & n_f = 4. \end{cases} \quad (22.14 \text{ в})$$

$$f_{3\nu l}^F = 0, \quad f_{3\nu l}^{NS} = f_{3\nu l}^{NS} = \begin{cases} x(u - \bar{u} + d - \bar{d} + s - \bar{s}), & n_f = 3 \\ x(u - \bar{u} + d - \bar{d} + s - \bar{s} + c - \bar{c}), & n_f = 4. \end{cases} \quad (22.14 \text{ г})$$

Некоторые из этих результатов уже были получены выше. Кроме того, можно ввести понятия распределения "валентных" кварков q_v (определив его как избыток числа кварков по сравнению с числом антикварков; для протона $\int_0^1 dx u_v = 2$, $\int_0^1 dx d_v = 1$) и "моря" остальных кварков и т.д. Подробное изложение этого круга вопросов можно найти в обзорах [11, 55].

§ 23. Общие свойства структурных функций в КХД

1. Правила сумм

Как уже неоднократно утверждалось, матричные элементы операторов A^n , вообще говоря, вычислить не удастся. Но в некоторых случаях соответствующие составные операторы оказываются связанными с генераторами той

или иной группы симметрии. Тогда они представляют собой физически наблюдаемые величины, и их матричные элементы, по крайней мере в принципе, можно измерить. Как обсуждалось в § 13, такие операторы не требуют проведения перенормировок, а их аномальные размерности равны нулю. Следовательно, в пределе $Q^2 \rightarrow \infty$ матричные элементы оператора A^n можно вычислить в модели свободных кварков — глюонов¹⁾.

Таковыми свойствами обладают несинглетные операторы при $n = 1$ и синглетные операторы при $n = 2$. Других операторов с указанными свойствами не существует, так как аномальные размерности γ_{NS} (и собственные значения матриц γ) обращаются в нуль только для приведенных значений n . Поэтому, по крайней мере в принципе, можно вычислить абсолютные значения (а не только зависимость от переменной Q^2) интегралов

$$\int_0^1 dx x^{-1} f_{NS}(x, Q^2), \quad \int_0^1 dx \bar{f}(x, Q^2). \quad (23.1)$$

Это оказывается практически осуществимым только в некоторых довольно редких случаях, когда интегралы (23.1) удается связать с наблюдаемыми величинами, о которых имеются экспериментальные данные. При этом возникают правила сумм, многие из которых уже были открыты с помощью партонной модели. Эти правила сумм в рамках квантовой хромодинамики получили статус точных утверждений. Здесь мы рассмотрим некоторые типичные примеры.

Начнем с рассмотрения несинглетного случая. Для структурных функций $f_{2,3}^{NS}$ соответствующие операторы при $n = 1$ представляют собой комбинации величин

$$N_{NS\mu}^{\pm} = \frac{1}{2} i : \bar{q} \lambda^a \gamma_{\mu} (1 \pm \gamma_5) q :,$$

которые в действительности генерируют преобразования киральной симметрии (§ 10). Как и ожидалось, аномальные размерности этих операторов равны нулю: $\gamma_{NS}^{(0)}(1) = \gamma_{NS}^{(1)}(1) = 0$. Для процессов электророжения с участием кварков трех ароматов u , d и s (в случае кварков четырех ароматов разбиение несколько изменяется), используя сокращенные обозначения, получаем

$$iTJ_{em}^{\mu}(z)J_{em}^{\nu}(0)|_{p^{pr}; n=1}^{NS} = \frac{1}{3} \bar{C}_{2NS}^1(z^2)J_{em}(0),$$

или точнее

$$\frac{1}{i} \bar{A}_{2NS}^1 p^{\mu} = \langle p | J_{em}^{\mu}(0) | p \rangle = 2(2\pi)^{-3} p^{\mu} Q_N,$$

¹⁾ В общем случае необходимо перейти к пределу $Q^2 \rightarrow \infty$ для устранения имеющейся в вильсоновских коэффициентах остаточной зависимости от взаимодействия кварков и глюонов.

где Q_N — заряд мишени в долях заряда электрона. Таким образом, учитывая поправки второго порядка теории возмущений, получаем

$$\int_0^1 dx x^{-1} f_2^{NS}(x, Q^2) = \frac{1}{3} Q_N \left\{ 1 + \frac{13 + 8\zeta(3) - 2\pi^2}{33 - 2n_f} \cdot \frac{\alpha_s(Q^2)}{3\pi} \right\}. \quad (23.2)$$

Аналогично в случае рассеяния нейтрино правило сумм Адлера справедливо при любых значениях квадрата 4-импульса Q^2 :

$$\int_0^1 dx x^{-1} \{ f_2^{\bar{\nu}p} - f_2^{\nu p} \} = 2. \quad (23.3)$$

Соответствующим оператором здесь является оператор изоспина.

Поправок к уравнению (23.3) не возникает, так как его можно связать с одновременным коммутатором алгебры токов (см. § 10 и работу [6]). В процессах электророжения благодаря четности структурной функции f_2 соответствующие поправки приводят к неравенству $\gamma_{NS}^{(1)+} \neq 0$. Обсуждение этого вопроса см. в статье [194].

Структурная функция f_3 удовлетворяет правилу сумм Гросса — Лавеллин-Смита [158]

$$\int_0^1 dx x^{-1} f_3^{\nu l}(x, Q^2) = 3 \left\{ 1 - \frac{\alpha_s(Q^2)}{\pi} + O(\alpha_s^2) \right\}. \quad (23.4)$$

Другие правила сумм, которым удовлетворяют несинглетные структурные функции, можно найти в обзоре [55] (см. также [27]).

Обратимся теперь к синглетным структурным функциям. В этом случае сохраняющиеся операторы отвечают значению $n = 2$. Этот факт находит свое отражение в равенствах $\det \gamma^{(0)}(2) = \det \gamma^{(1)}(2) = 0$. Поскольку синглетные структурные функции всегда четные, нет необходимости различать величины $\gamma^{(1)+}$ и $\gamma^{(1)-}$, так как всюду входит только одна из них $\gamma^{(1)+} \equiv \gamma^{(1)}$. В самом деле [149],

$$\gamma^{(0)}(2) = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 64 & -12n_f \\ -64 & 12n_f \end{pmatrix}, \quad (23.5 \text{ а})$$

$$\gamma^{(1)}(2) = \frac{1}{243} \begin{pmatrix} 65[367 - 39n_f] & -3666n_f \\ -64[367 - 39n_f] & 3666n_f \end{pmatrix}. \quad (23.5 \text{ б})$$

Нормировка функции f^V априори произвольна; выберем ее таким образом, чтобы собственный вектор, отвечающий нулевому собственному значению матрицы γ , был в точности равен сумме. Сохраняющимся оператором явля-

ется тензор энергии-импульса (см. (10.2))

$$\Theta^{\mu\nu} = i \sum_f \bar{q}_f \gamma^\mu D^\nu q_f + g_{\alpha\beta} G^{\mu\alpha} G^{\beta\nu} - g^{\mu\nu} \mathcal{L}.$$

Член $g^{\mu\nu} \mathcal{L}$ приводит к вкладам величины $O(M^2/Q^2)$, которыми в данном случае можно пренебречь. Таким образом, находим

$$\int_0^1 dx \{ f_2^F(x, Q^2) + f_2^V(x, Q^2) \} = \delta \left\{ 1 + c_2 \frac{\alpha_s(Q^2)}{\pi} + O(\alpha_s^2) \right\}, \quad (23.6)$$

где параметры δ и c_2 зависят от типа рассматриваемого процесса. В процессах электророжения

$$\delta^{ep} = \langle Q_f^2 \rangle, \quad c_2 = -5/9,$$

где $\langle Q_f^2 \rangle$ — средний заряд возбуждаемых кварков различных ароматов. Для процессов νI - и νp -рассеяния параметр δ принимает значения

$$\delta^{\nu I} = 1, \quad \delta^{\nu p} = 2/3.$$

В действительности в пределе $Q^2 \rightarrow \infty$ можно вычислить интегралы отдельно для каждой из функций f_2^i , $i = 1, 2$. Это обусловлено тем, что при $n = 2$

$$d_+(2) = 0, \quad d_-(2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{16 + 3n_f}{33 - 2n_f} > 0.$$

Следовательно, в ведущем порядке по константе связи α_s можно написать (матрица \mathbf{S} определена в (21.12))

$$\vec{\mu}(2, Q^2) \Big|_{Q^2 \rightarrow \infty} = \mathbf{S}(2) \vec{b}(2), \quad \vec{b}(2) = b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

с некоторым коэффициентом, не зависящим от квадрата 4-импульса Q^2 . Таким образом,

$$\int_0^1 dx f_2^F(x, Q^2) \Big|_{Q^2 \rightarrow \infty} = \delta \frac{3n_f}{16 + 3n_f}, \quad \int_0^1 dx f_2^V(x, Q^2) \Big|_{Q^2 \rightarrow \infty} = \delta \frac{16}{16 + 3n_f}. \quad (23.7)$$

К сожалению, поправки к (23.7) имеют вид

$$K[\alpha_s(Q^2)]^{-d_-(2)},$$

где коэффициент K пока вычислить не удается. (Но поправки порядка $O(\alpha_s)$ к выражениям (23.7) известны; см., например, [194].) Выражения (23.7) при-

надлежат к числу тех, которые явно демонстрируют существование глюонов. Если бы глюонов не существовало, то весь импульс адрона распределялся бы между кварками и был бы справедлив результат

$$\int_0^1 dx f_2^F(x, Q^2) \approx \delta,$$

который, скажем, для кварков четырех ароматов $n_f = 4$ вдвое превышает экспериментальное значение. Например, для процесса νI -рассеяния [87] получено значение

$$\int_0^1 dx f_2^{\text{exp}}(x, Q^2) \approx 0.43 \pm 0.03, \quad (Q^2 \approx \text{от } 30 \text{ до } 100 \text{ ГэВ}^2),$$

а теоретически вычисленное (с учетом глюонного вклада) значение равно¹⁾

$$\int_0^1 dx f_2^{\text{th}}(x, Q^2) \approx \frac{12}{28} = 0.43.$$

Анализ этих соотношений в ведущем порядке теории возмущений был выполнен в работе [162], хотя импульсные правила сумм (только на кварковом уровне) обсуждались уже в обзоре [193].

2. Поведение структурных функций в крайних точках

Начнем с рассмотрения поведения несинглетных структурных функций в пределе $x \rightarrow 1$. Предположим, что функции f^{NS} обладают асимптотическим поведением вида

$$f^{NS}(x, Q^2) \underset{x \rightarrow 1}{\approx} A(Q^2)(1-x)^{\nu(\alpha_s)}, \quad (23.8)$$

к которому могут существовать логарифмические поправки (см. ниже). В действительности соотношение (23.8) можно доказать в рамках квантовой хромодинамики, но мы не будем делать этого здесь²⁾. Исходя из общих соображений, следует ожидать, что поведение структурных функций в пределе $x \rightarrow 1$ связано с поведением моментов от структурных функций при больших значениях n . Легко убедиться, что

$$d(n) \underset{n \rightarrow \infty}{\approx} \frac{-16}{33 - 2n_f} \left(\log n - \frac{3}{4} + \gamma_E + O\left(\frac{1}{n}\right) \right). \quad (23.9)$$

¹⁾ Заметим, что нейтрино ν или электроны (мюоны) e (μ), используемые в качестве пробных частиц, взаимодействуют только с кварками и позволяют экспериментально определить только структурную функцию f^F . Для непосредственного измерения структурной функции f^V необходимы пробные частицы, взаимодействующие с глюонами.

²⁾ См. работу [54] и цитируемую там литературу.

Используя асимптотику (23.8), для моментов получаем выражение

$$\mu_{NS}(n, Q^2) \underset{n \rightarrow \infty}{\approx} A(Q^2) \frac{\Gamma(n-1)\Gamma[1+\nu(\alpha_s)]}{\Gamma[n+\nu(\alpha_s)]},$$

а из соотношений (23.9) и (20.6) для отношения моментов находим

$$\frac{\mu_{NS}(n, Q^2)}{\mu_{NS}(n, Q_0^2)} \underset{n \rightarrow \infty}{\approx} \exp \left\{ \left[\log \frac{\alpha_s(Q^2)}{\alpha_s(Q_0^2)} \right] \frac{16}{33-2n_f} \left(\log n - \frac{3}{4} + \gamma_E \right) \right\}.$$

Приравнявая результаты, находим точный вид коэффициентов A и ν и выражения для асимптотики структурной функции в пределе $x \rightarrow 1$:

$$f^{NS}(x, Q^2) \underset{x \rightarrow 1}{\approx} A_{0NS} [\alpha_s(Q^2)]^{-d_0} \frac{(1-x)^{\nu_{NS}(\alpha_s)}}{\Gamma[1+\nu_{NS}(\alpha_s)]}, \quad (23.10 \text{ а})$$

$$\nu_{NS}(\alpha_s) = \nu_{NS0} - \frac{16}{33-2n_f} \log \alpha_s(Q^2), \quad (23.10 \text{ б})$$

$$d_0 = \frac{16}{33-2n_f} \left(\frac{3}{4} - \gamma_E \right).$$

Константы ν_0 и A_{0NS} теоретически рассчитать не удастся, но ожидаемое значение параметра ν_{0NS} лежит в пределах от 2 до 3 [122].

Для синглетного случая вычисления усложняются из-за матричного характера уравнений. Было найдено, что асимптотическое поведение структурных функций для глюонов отличается от (23.8), но асимптотики структурных функций для кварков сходны с асимптотиками несинглетных структурных функций (см. работы [194, 199], в которых содержатся также вычисления во втором порядке теории возмущений). Эти асимптотики имеют вид

$$f^F(x, Q^2) \underset{x \rightarrow 1}{\approx} A_{0S} [\alpha_s(Q^2)]^{-d_0} \frac{(1-x)^{\nu_S(\alpha_s)}}{\Gamma[1+\nu_S(\alpha_s)]}, \quad (23.11)$$

$$f^V(x, Q^2) \underset{x \rightarrow 1}{\approx} \frac{2}{5} A_{0S} [\alpha_s(Q^2)]^{-d_0} \frac{(1-x)^{\nu_S(\alpha_s)+1}}{\Gamma(2+\nu_S(\alpha_s))|\log(1-x)|}. \quad (23.12)$$

Здесь d_0 определяется формулой (23.10б), а параметр ν_S выражается такой же формулой, как ν_{NS} :

$$\nu_S(\alpha_s) = \nu_{0S} - \frac{16}{33-2n_f} \log \alpha_s(Q^2).$$

Коэффициенты A_{0S} и ν_{0S} в рамках теории возмущений КХД получить нельзя. Можно утверждать следующее: во-первых, глюонные структурные функ-

ции в пределе $x \rightarrow 1$ стремятся к нулю быстрее, чем синглетные структурные функции кварков, и, во-вторых, *все* структурные функции быстро убывают в пределе $x \rightarrow 1$ при $Q^2 \rightarrow \infty$. Эти выводы подтверждаются всеми экспериментальными данными.

Поправки второго порядка теории возмущений несколько изменяют функциональный вид асимптотик структурных функций в пределе $x \rightarrow 1$. Например, для несинглетных структурных функций с учетом поправок второго порядка получаем [150]

$$f^{NS}(x, Q^2) \underset{x \rightarrow 1}{\approx} A_{0NS} [\alpha_s(Q^2)]^{-d_0} \frac{e^{a(\alpha_s) \alpha_s(Q^2)}}{\Gamma[1 + \nu_{1NS}(\alpha_s)]} \times (1-x)^{\nu_{1NS}(\alpha_s) + 2\alpha_s[\log(1-x)]/3\pi}. \quad (23.13)$$

Здесь коэффициенты ν_{1NS} и a имеют вид

$$\begin{aligned} \nu_{1NS}(\alpha_s) &= \nu_{NS}(\alpha_s) - \psi(\nu_{NS}(\alpha_s) + 1) \frac{4\alpha_s(Q^2)}{3\pi} - a_1 \alpha_s(Q^2), \\ a(\alpha_s) &= a_0 + a_1 \psi(\nu_{NS}(\alpha_s) + 1) + \frac{2}{3\pi} \{ [\psi(\nu_{NS}(\alpha_s) + 1)]^2 - \psi'(\nu_{NS}(\alpha_s) + 1) \}. \\ a_0 &\approx 1.18, \quad a_1 \approx 0.66. \end{aligned}$$

Интересно отметить, что благодаря члену

$$(1-x)^{2\alpha_s[\log(1-x)]/3\pi}, \quad (23.14)$$

поправки можно сделать сколь угодно большими, взяв значение переменной x достаточно близким к единице. Конечно, это означает лишь, что при $x \rightarrow 1$ как и ожидалось, теория возмущений становится неприменимой. При $x = 1$ возникает необходимость учета связанных состояний (упругий вклад в процесс $\gamma^* + N \rightarrow \text{all}$, обусловленный реакцией $\gamma^* + N \rightarrow N$). В действительности существуют и другие причины, по которым рассмотрение на основе теории возмущений становится неприменимым, когда переменная x близка к единице. Из выражения (23.14) видно, что формула (23.13) применима только при промежуточных значениях переменной x :

$$1-x \ll 1, \text{ но } \frac{2\alpha_s}{3\pi} |\log(1-x)| \ll 1. \quad (23.15)$$

Асимптотическое поведение структурных функций в пределе $x \rightarrow 1$ (или $n \rightarrow \infty$) вычислено во всех порядках по доминирующим членам вида $(\alpha_s \log n)^n$ [15, 71]. С точностью до замены $A_{0NS} \rightarrow A_{0S}$, $\nu_{1NS} \rightarrow \nu_{1S}$, синглетная функция распределения кварков имеет вид, аналогичный (23.13).

Обратимся к рассмотрению поведения структурных функций при $x \approx 0$. При изучении поведения структурных функций в пределе $x \rightarrow 0$ квадрату

4-импульса Q^2 необходимо приписывать большое фиксированное значение, при котором оправданно применение теории возмущений, и положить $v \rightarrow \infty$. В этих условиях имеет место предел Редже¹⁾, и так как структурные функции можно интерпретировать как сечения рассеяния виртуального гамма-кванта γ (или векторных бозонов W, Z) с квадратом инвариантной массы, равным $-Q^2$, то можно предположить [2] следующее асимптотическое поведение:

$$f(x, Q^2) \underset{x \rightarrow 0}{\approx} b(Q^2) \nu^{\alpha_R(0)}, \quad x = \frac{Q^2}{2\nu}, \quad (23.16)$$

где R — соответствующая траектория Редже. В отличие от асимптотик структурных функций в пределе $x \rightarrow 1$ доказать асимптотические формулы (23.16) в рамках квантовой хромодинамики на современном этапе развития теории не удается.

Перепишем (23.16) в более удобном виде

$$f_{NS}(x, Q^2) \underset{x \rightarrow 0}{\approx} B_{NS}(Q^2) x^\lambda, \quad (23.17 \text{ a})$$

$$f_i(x, Q^2) \underset{x \rightarrow 0}{\approx} B_i(Q^2) x^{-\lambda_i}, \quad i = F, V. \quad (23.17 \text{ б})$$

В принципе можно допустить зависимость параметров λ от Q^2 , но КХД и теория Редже показывают, что они имеют постоянные значения с точностью до членов $O(M^2/Q^2)$.

Поведение структурных функций f в пределе $x \rightarrow 0$ связано с сингулярностями моментов $\mu(n, Q^2)^{2)}$. Установление этой связи требует аналитического продолжения формул для $\mu(n, Q^2)$ по переменной n . Поскольку моменты выражаются в виде $\mu(n, Q^2) = A^n C^n$, соответствующие сингулярности обуславливаются особенностями величин A^n или C^n в зависимости от того, какая из них расположена правее на комплексной плоскости. Можно показать, что асимптотические формулы (23.16) и (23.17) возможны только в том случае, когда крайняя правая сингулярная точка величины A^n расположена правее соответствующей точки коэффициентной функции C^n . Кроме того, если n_0 — такая крайняя правая сингулярная точка A , то она удовлетворяет равенствам

$$n_0 = 1 - \lambda \quad (NS)$$

$$n_0 = 1 + \lambda_s \quad (\text{singlet}),$$

и с необходимостью выполняется соотношение $\lambda_F = \lambda_V = \lambda_s$.

¹⁾ Сведения о теории Редже можно найти, например, в монографии [28].

²⁾ Детали приводимого доказательства можно найти для несинглетного случая в работе [199] и для обоих случаев в первом и втором порядках теории возмущений в работе [194]. В этих работах обсуждаются также другие асимптотики структурных функций в пределе $x \rightarrow 0$, отличные от реджевских.

Так как сингулярности коэффициентных функций C^n совпадают с сингулярностями функций $d(n)$ или $D(n)$, параметры λ и λ_s удовлетворяют неравенствам

$$\lambda < 1, \quad \lambda_s > 0.$$

В случае *рассеяния частиц, лежащих вне массовой поверхности*, второе неравенство обеспечивает существование особенности выше померонного полюса. В пользу этого свидетельствуют результаты расчетов, выполненных Грибовым и Редже (см., например, обзор [30] и цитируемую там литературу).

Рассмотрим теперь синглетный случай. Из выражения (20.7) следует, что величина

$$[\alpha_s(Q^2)]^{D(n)} \vec{\mu}(n, Q^2)$$

не зависит от значения Q^2 . Пусть матрица $S(n)$ диагонализует матрицу $D(n)$. Запишем матрицу $S(n)$ в виде, аналогичном (21.12), и примем, что она удовлетворяет соотношению

$$S^{-1}(n)D(n)S(n) = \hat{D}(n) = \begin{pmatrix} d_+(n) & 0 \\ 0 & d_-(n) \end{pmatrix}. \quad (23.18)$$

Используя асимптотические формулы (23.17) и полагая $n = 1 + \lambda_s + \epsilon$, находим

$$\vec{\mu}(1 + \lambda_s + \epsilon) = \frac{\vec{B}(Q^2)}{\epsilon}. \quad (23.19)$$

Таким образом, величина

$$[\alpha_s(Q^2)]^{D(1+\lambda_s+\epsilon)} \vec{B}(Q^2) \equiv \vec{b}$$

не зависит от квадрата 4-импульса Q^2 . Применяя матрицу $S(1 + \lambda_s + \epsilon)$ и полагая $\epsilon \rightarrow 0$, получаем

$$\vec{B}(Q^2) = S(1 + \lambda_s) \begin{pmatrix} \alpha_s^{-d_+(1+\lambda_s)} & 0 \\ 0 & \alpha_s^{-d_-(1+\lambda_s)} \end{pmatrix} \vec{b}.$$

При этом собственные значения диагональной матрицы обозначены так, что выполняется условие $d_+ > d_-$; следовательно, в ведущем порядке теории возмущений можно пренебречь членом $\alpha_s^{-d_-}$ по сравнению с членом $\alpha_s^{-d_+}$, и мы получаем окончательные соотношения

$$f_i(x, Q^2) \underset{x \rightarrow 0}{\approx} B_{0i} [\alpha_s(Q^2)]^{-d_+(1+\lambda_s)} x^{-\lambda_s}, \quad (23.20 \text{ а})$$

$$\frac{B_{0V}}{B_{0F}} = \frac{d_+(1 + \lambda_s) - D_{11}(1 + \lambda_s)}{D_{12}(1 + \lambda_s)}. \quad (23.20 \text{ б})$$

Константы B_{OF} , λ_s в рамках КХД вычислить не удастся, хотя ожидается, что $\lambda_s \approx 0,1 - 0,6$.

Для несинглетных структурных функций имеем

$$f_{NS}(x, Q^2) \underset{x \rightarrow 0}{\approx} B_{ONS} [\alpha_s(Q^2)]^{-d(1-\lambda)} x^\lambda. \quad (23.21)$$

Величина коэффициента B_{ONS} неизвестна; в силу того что параметр λ связан с *точкой пересечения* траектории Редже с осью координат, для него можно ожидать значения

$$\lambda = 1 - \alpha_p(0) \approx 0.5.$$

Следует отметить три важные особенности. Во-первых, в отличие от асимптотических формул в пределе $x \rightarrow 1$ поправки высших порядков не искажают результатов, полученных при $x \approx 0$; они сводятся просто к умножению формул (23.20) и (23.21) на $1 + b_1 \alpha_s$, где коэффициент b_1 известен. Во-вторых, так как ожидаемые значения параметров λ , λ_s и комбинаций $d(1-\lambda)$, $d_+(1+\lambda_s)$ положительны, при малых значениях x *все* структурные функции возрастают с увеличением квадрата 4-импульса Q^2 . Это свойство структурных функций также подтверждается экспериментом. Наконец, в-третьих, в отличие от случая $x \rightarrow 1$ при $x \approx 0$ глюонные функции распределения превышают синглетные функции распределения кварков. Действительно, правая часть (23.20б) для ожидаемых значений параметра λ_s имеет величину в пределах 4 – 8.

§ 24. Сравнение с экспериментом; параметризации, согласующиеся с КХД, и точечноподобная эволюция структурных функций

Поскольку теоретические предсказания для моментов оказываются проще, чем для самих структурных функций, может показаться; что с экспериментом следует сравнивать предсказания КХД именно для моментов. Но это неудобно по следующим причинам. Во-первых, чтобы экспериментально получить значения моментов структурных функций в широком интервале значений 4-импульса Q^2 , необходимо провести детальные измерения структурных функций для целой последовательности близлежащих значений переменной x . Экспериментально это не всегда выполнимо. Но даже при наличии хороших экспериментальных данных возникают проблемы с вычислением высших моментов. Фактически вычисление высших моментов сводится к взятию интегралов от структурной функции f с весом x^{n-2} . Основной вклад в такие интегралы дает область $x \approx 1$. Так как в этой области значения структурных функций очень малы, экспериментальные ошибки возрастают и даже в самых благоприятных случаях становятся неконтролируемыми при $n \geq 6$.

Таким образом, теряется огромное количество экспериментальной информации. Указанные трудности послужили причиной для разработки других методов сравнения.

Можно также написать разумную параметризацию для структурной функции f , которая содержала бы результаты квантовой хромодинамики и которую можно было бы согласовать с экспериментальными данными. Это не очень строгий метод, но он очень прост и приводит к явным аналитическим выражениям для структурных функций, которые затем можно использовать для описания других процессов (Дредла – Яна, адрон-адронного рассеяния на больших p_t или рассеяния виртуальных адронов).

Такая параметризация впервые была введена в рассмотрение Фейнманом и Филдом [122] и имела вид

$$f_a(x, Q^2) = C_a x^{\lambda_a} (1-x)^{\nu_a}, \quad (24.1 а)$$

или с учетом полюсов Редже

$$f_a(x, Q^2) = (C_a x^{\lambda_a} + C'_a x^{\lambda'_a})(1-x)^{\nu_a}. \quad (24.1 б)$$

Полагая параметры C , λ и ν постоянными, получим бьеркеновский скейлинг.

В работе [57] было отмечено, что, введя зависимость параметров λ и ν от константы связи α_s в виде

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 \log \alpha_s, \quad \nu = \nu_0 + \nu_1 \log \alpha_s,$$

можно вычислить коэффициент C (используя правила сумм, изложенные в § 23) как известную функцию параметров λ_0 , λ_1 , ν_0 , ν_1 , α_s . Затем нужно потребовать, чтобы рассматриваемая параметризация удовлетворяла, с одной стороны, уравнениям КХД для моментов, а с другой – экспериментально измеренным значениям структурных функций f . Эти требования позволяют фиксировать значения параметров λ и ν .

Следующий шаг сделали Лопец и Индурайн [194] (они учли ведущий и следующий порядки теории возмущений), отметившие, что для вычисления параметров λ_1 (который оказывается равным нулю) и ν_1 можно использовать результаты § 23, п. 2. Таким способом получают исключительно простые параметризации для структурных функций. Они точно удовлетворяют интегральным соотношениям известных правил сумм. Уравнениям же эволюции КХД эти параметризации точно удовлетворяют только в конечных точках $x = 0$ и $x = 1$, а при промежуточных значениях x погрешность составляет менее 1%. В ведущем порядке теории возмущений искомые параметризации

ИМЕЮТ ВИД

$$f_2^{NS}(x, Q^2) = \left\{ B_{0NS} [\alpha_s(Q^2)]^{-d_+(1-\lambda)} (x^\lambda - x^{\mu_{NS}(\alpha_s)}) + A_{0NS} [\alpha_s(Q^2)]^{-d_0} \frac{\Gamma(\nu_{0NS} + 1)}{\Gamma(\nu_{NS}(\alpha_s) + 1)} x^{\mu_{NS}(\alpha_s)} \right\} (1-x)^{\nu_{NS}(\alpha_s)}, \quad (24.2 \text{ а})$$

$$f_2^F(x, Q^2) = \left\{ B_{0F} [\alpha_s(Q^2)]^{-d_+(1+\lambda_s)} (x^{-\lambda_s} - x^{-\mu_F(\alpha_s)}) + A_{0S} [\alpha_s(Q^2)]^{-d_0} \frac{\Gamma(\nu_{0S} + 1)}{\Gamma(\nu_S(\alpha_s) + 1)} x^{-\mu_F(\alpha_s)} \right\} (1-x)^{\nu_S(\alpha_s)}, \quad (24.2 \text{ б})$$

$$f_2^V(x; Q^2) = \left\{ B_{0F} \frac{d_+(1+\lambda_s) - D_{FF}(1+\lambda_s)}{D_{FV}(1+\lambda_s)} [\alpha_s(Q^2)]^{-d_+(1+\lambda_s)} \times (x^{-\lambda_s} - x^{-\mu_V(\alpha_s)}) + \frac{2}{5} A_{0S} [\alpha_s(Q^2)]^{-d_0} x^{-\mu_V(\alpha_s)} \frac{\Gamma(\nu_{0S} + 1)}{\Gamma(\nu_S(\alpha_s) + 2)} \right\} \times \frac{(1-x)^{\nu_S(\alpha_s)+1}}{1+|\log(1-x)|}, \quad (24.2 \text{ в})$$

где

$$\nu_i(\alpha_s) = \nu_{0i} - \frac{16}{33-2n_f} \log \alpha_s(Q^2), \quad i = S, NS, \quad (24.2 \text{ г})$$

а параметр λ связан с траекторией Редже ρ соотношением $\lambda \approx 1 - \alpha_\rho(0) \approx 0,5$; величину μ можно выразить через другие константы, используя для этого правила сумм, изложенные в § 23. Таким образом, мы получили набор простых выражений, параметризующих три структурные функции: f_2^{NS} , f_2^F и f_2^V , исходя из семи параметров: ν_{0NS} , ν_{0S} , A_{0S} , A_{0NS} , B_{0NS} , B_{0F} , λ_s (кроме параметра обрезания Λ). Их следует выбрать так, чтобы воспроизвести экспериментальные результаты. На самом деле, даже не увеличивая числа параметров, можно вычислить и продольную структурную функцию f_L . Поэтому тот факт, что удастся добиться согласия с экспериментальными данными, является важной проверкой КХД¹⁾. Сравнение экспериментальных данных с теоретическими параметризациями представлено на рис. 19 а.

¹⁾ В частности, потому, что при этом можно утверждать, что значения параметров $\nu_{0NS} \approx \nu_{0S} \approx 2 - 2,5$, $0 < \lambda_S < 1$ согласуются с ожидаемыми.

Обратимся теперь к методу точного восстановления структурных функций. Рассмотрим несинглетный случай и выполним замену переменной $\log x = -\xi$. Тогда уравнения эволюции можно записать в виде

$$\begin{aligned}\mu_{NS}(n, Q^2) &= \int_0^\infty d\xi e^{-(n-1)\xi} f_{NS}(e^\xi, Q^2), \\ \mu_{NS}(n, Q^2) &= \left[\frac{\alpha_s(Q_0^2)}{\alpha_s(Q^2)} \right]^{d(n)} \mu_{NS}(n, Q_0^2),\end{aligned}\quad (24.3)$$

и использовать известную теорему о свертках для преобразований Лапласа, чтобы обратить (24.3) и получить формулу

$$f_{NS}(x, Q^2) = \int_x^1 dy b(x, y; Q^2, Q_0^2) f_{NS}(y, Q^2),$$

где ядро уравнения b можно выразить через параметры γ и C^n . В ведущем порядке теории возмущений результат имеет вид [156]

$$b = b^{(0)}(x, y; Q^2, Q_0^2) = \sum_{j=0}^{\infty} G_j(r) b_0(x, y; r+j),$$

$$r = \frac{16}{3\beta_0} \log \frac{\alpha_s(Q_0^2)}{\alpha_s(Q^2)},$$

где

$$G_0(r) = 1, \quad G_1(r) = -\frac{r}{2}, \quad G_2(r) = r \frac{3r+14}{24}, \dots,$$

$$b_0(x, y; r+j) = \frac{x}{y^2} \frac{1}{\Gamma(r+j)} \left(\log \frac{y}{x} \right)^{r+j} e^{(3/4 - \gamma_E)r}.$$

Во втором порядке теории возмущений получаем [150]

$$b = b^{(0)} + \frac{\alpha_s(Q^2) - \alpha_s(Q_0^2)}{4\pi} b^{(1)},$$

где

$$b^{(1)}(x, y; Q^2, Q_0^2) = \sum_{p=0}^2 \sum_{j=0}^{\infty} a_{pj}(r) b_p(x, y; r+j),$$

$$b_1 = \left\{ \psi(r+j) - \log \log \frac{y}{x} \right\} b_0,$$

$$b_2 = \left\{ \left[\psi(r+j) - \log \log \frac{y}{x} \right]^2 - \psi'(r+j) \right\} b_0.$$

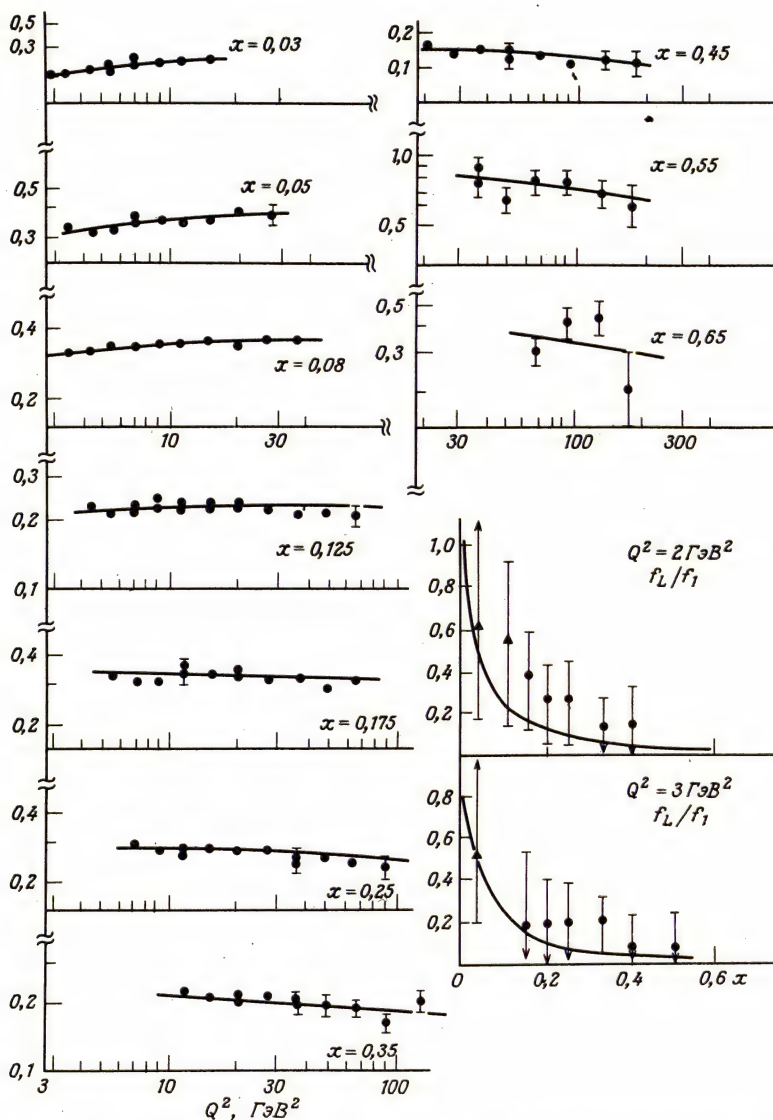


Рис. 19а. Согласование структурной функции $f_2(x, Q^2)$ с экспериментальными данными по μp -рассеянию [20] и величины s_1/s_1 с данными работ [16, 43]. Использованы параметризации (24.2), включающие поправки второго порядка. Параметр обрезания Λ равен 100 МэВ. То же значение параметра Λ получено прямым вычислением в работе [20]. (Графики из неопубликованной работы В. Escoubes, M.J. Herrero, C. Lopez, F.J. Yndurain.)

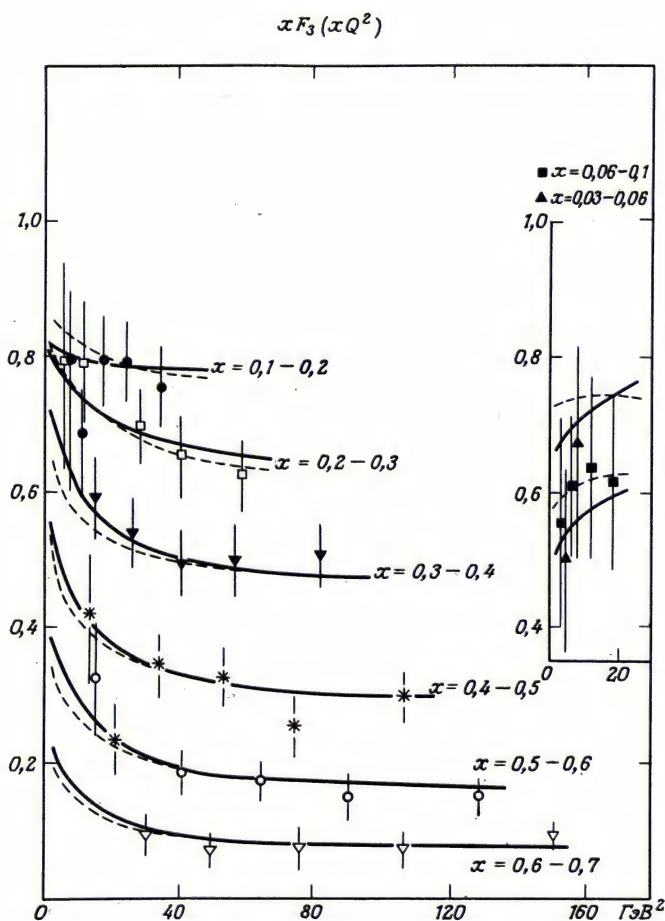


Рис. 196. Согласование теоретических значений с экспериментальными данными по ν -рассеянию [87] с учетом поправок второго порядка теории возмущений КХД. Значение параметра Λ снижается с 400 ± 250 до 180 ± 130 МэВ при использовании заново проанализированных данных (см. H. Abramowicz et al. CERN print EP/81-168, 1981; будет опубликовано в Zs. Phys. C).

Наконец, коэффициенты a можно выразить через величины G :

$$a_{pj} = \sum_{l=0}^j H_{pl} G_{j-l}(r);$$

таблицу значений H можно найти в работе [150].

Распространение на синглетный случай оказывается нетривиальным [149]. Степень согласия теоретических и экспериментальных результатов определяется единственным затравочным параметром $f(x, Q_0^2)$, задаваемым при некотором фиксированном значении Q_0^2 (лежащем, как правило, в интервале $2 - 3 \text{ ГэВ}^2$). Результат представлен на рис. 19 б.

Другой метод состоит в прямом использовании уравнений эволюции Алтарелли – Паризи. С ним можно ознакомиться в работе [4].

§ 25. Поправки на массу мишени

Рассмотрим момент от несинглетной части структурной функции f . В принципе μ_{NS} зависит не только от параметров n и α_s , но и от различных масс: массы мишени m_N , масс кварков m_q и, наконец, от непертурбативных масс, которыми пока будем пренебрегать. Массы кварков и мишени приводят к поправкам $O(m_q^2/Q^2)$ и $O(m_N^2/Q^2)$ соответственно. Как будет показано в § 32, массы кварков u , d и s малы; наибольшую массу имеет s -кварк: $\hat{m}_s \approx 0,3 \text{ ГэВ}$. С найденными значениями параметра обрезания Λ теория возмущений КХД едва ли будет иметь смысл при передачах импульса $Q^2 < 1,5 \text{ ГэВ}^2$; таким образом, даже на нижнем пределе поправки за счет массы s -кварка не будут превышать 5%. Тяжелые кварки приводят к поправкам иного порядка, так как их массы заметно больше: $m_c \approx 1,5 \text{ ГэВ}$, а $m_b \approx 5 \text{ ГэВ}$; но мы пока поправками за счет тяжелых кварков будем пренебрегать. Поправки, обусловленные массой мишени, порядка m_N^2/Q^2 , т.е. велики. В этом параграфе будет показано, каким образом можно учесть такие поправки.

Влияние поправок, обусловленных массой мишени, было оценено в работе [202]; это рассмотрение приводит к так называемому ξ -скейлингу. В своем изложении мы будем следовать методу, предложенному в статье [143]. Вспомним разложения (19.3) и (19.11). В общем случае они содержат члены еще двух типов; это члены, соответствующие операторам

$$g^{\mu\nu} \bar{q} \partial D^{\mu_1} \dots q \quad \text{и} \quad g^{\mu\nu} \bar{q} \partial^2 \gamma^{\mu_1} D^{\mu_2} \dots q.$$

В случае свободных полей $\not{A}q = im_q q$; следовательно, они приводят к поправкам порядка m_q^2/Q^2 , которыми мы сейчас пренебрегаем. Но члены

$$\langle p | N_{NS}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} (0) | p \rangle = g^{\mu_1 \mu_2} \dots g^{\mu_{k_1} \mu_{k_2}} p^{\mu_{k_1+1}} \dots p^{\mu_{k_2-m}} (p^2)^m \bar{A}_{NS}^n,$$

как мы вскоре убедимся, дают поправки $\sim m_N^2 / Q^2$. Раньше мы пренебрегали и этими поправками; сейчас же мы сосредоточим на них внимание. Рассмотрим оператор $N^{\mu_1 \dots \mu_n}$; ниже будет проведена замена индексов $n \rightarrow n+2$ и $\mu_{n+1} \rightarrow \mu$, $\mu_{n+2} \rightarrow \nu$. Благодаря симметрии по индексам оператора N его матричные элементы можно записать в следующем общем виде (n — четное число):

$$i \langle p | N_{NS}^{\mu_1 \dots \mu_n} (0) | p \rangle = \sum_{j=0}^{n/2} (-1)^j \frac{(n-j)!}{2^j n!} \left\{ \sum_{\text{по перестановкам}} g^{\mu_1 \mu_{i_1}} \dots g^{\mu_j \mu_{j_i}} \right\} (p^2)^j \\ \times \sum_{\text{по перестановкам}} p^{\mu_1} \dots p^{\mu_{n-2j}} \bar{A}_{NS,j}^{(\text{TMC})n-2}, \\ N_{NS}^{\mu_1 \dots \mu_n} = \mathcal{S} \bar{q} \gamma^{\mu_1} D^{\mu_2} \dots D^{\mu_n} q |_{NS} \quad (25.1)$$

(индекс ТМС означает, что учтена поправка на массу мишени). Так как выполняется равенство $g^{\mu_i \mu_j} < p | N_{NS}^{\mu_1 \dots \mu_n} | p \rangle = 0$, мы получаем набор соотношений, разрешив которые можно выразить величины A_j^n через A_0^n . Тогда

$$T_{2NS}^{(\text{TMC})}(x, Q^2) = \frac{1}{2} \sum_n x^{-n-1} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{p^2}{Q^2} \right)^j \frac{(n+j+2)! (n+2j)!}{j! n! (n+2j+2)!} \\ \times A_{NS}^{(0)n+2j} C_{NS}^{n+2j},$$

$$A_{NS}^{(0)n} \equiv A_{NS,i=0}^{(\text{TMC})n}. \quad (25.2)$$

Окончательный результат имеет вид

$$\mu_{NS}^{(\text{TMC})}(n, Q^2) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{m_N^2}{Q^2} \right)^j \frac{(n+j)!}{j! (n-2)!} \frac{C_{NS}^{n+2j}}{(n+2j)(n+2j-1)} A_{NS}^{(0)n+2j}, \quad (25.3 \text{ а})$$

$$\mu_{NS}^{(\text{TMC})}(n, Q^2) = \int_0^1 dx x^{n-2} f_2^{(\text{TMC})}(x, Q^2). \quad (25.3 \text{ б})$$

Функцию f_2 удобно определить как предел структурной функции $f_2^{(\text{TMC})}$ при $m_N^2 \rightarrow 0$, а момент μ задать в виде

$$\mu_{NS}(n, Q^2) = \int_0^1 dx x^{n-2} f_2(x, Q^2). \quad (25.4)$$

Полученные в § 24 уравнения применимы как раз к этим величинам μ и f_2 . Чтобы вычислить моменты с учетом поправок на массу мишени, используем

выражение (25.3а) и получим

$$\mu_{NS}^{(\text{TMC})}(n, Q^2) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{m_N^2}{Q^2} \right)^j \frac{(n+j)!}{j!(n-2)!} \times \frac{1}{(n+2j)(n+2j-1)} \mu_{NS}(n, Q^2); \quad (25.5)$$

однако вычислять моменты нет необходимости. После несложных выкладок можно найти, что выражение (25.5) эквивалентно следующему выражению (*ξ-скейлингу*):

$$f_2^{(\text{TMC})}(x, Q^2) = \frac{x^2/\xi^2}{(1 + 4x^2 m_N^2/Q^2)^{3/2}} f_2(\xi, Q^2) + \frac{6m_N^2}{Q^2} \cdot \frac{x^3}{(1 + 4x^2 m_N^2/Q^2)^2} \int_{\xi}^1 \frac{d\xi'}{\xi'^2} f_2(\xi', Q^2) + \frac{12m_N^4}{Q^4} \cdot \frac{x^4}{(1 + 4x^2 m_N^2/Q^2)^{5/2}} \int_{\xi}^1 d\xi' \int_{\xi'}^1 \frac{d\xi''}{\xi''^2} f_2(\xi'', Q^2), \quad (25.6)$$

где ξ — так называемая переменная Нахтмана:

$$\xi = \frac{2x}{1 + (1 + 4x^2 m_N^2/Q^2)^{1/2}}. \quad (25.7)$$

Следует отметить некоторые особенности полученных формул. Во-первых, при малых значениях переменных x , поскольку поправки на массу мишени ведут себя как $x^2 m_N^2/Q^2$, ими можно полностью пренебречь. Эти поправки важны только при больших (но не слишком больших) значениях переменной x . В самом деле, если эти формулы применить к случаю $x \rightarrow 1$, то возникают неустойчивости. Это происходит по двум причинам. Во-первых, вклад операторов высших твистов (которые рассматриваются ниже) возрастает в пределе $x \rightarrow 1$. Хотя и ожидается, что обусловленные этими операторами поправки имеют вид $3M^2/Q^2$, где $M \approx \Lambda$, т.е. на половину порядка величины меньше, чем поправки на массу мишени, но могут происходить (и, вероятно, происходят) разного рода сокращения¹⁾. Во-вторых, как было показано в § 23, в пределе $x \rightarrow 1$ теория возмущений неприменима.

Поэтому более последовательным, по-видимому, было бы разложить (25.6) в ряд по степеням величины m_N^2/Q^2 и сохранить только ведущий член.

¹⁾ Обсуждение этого вопроса можно найти в работах [90, 91].

Выражение для поправок на массу мишени в этом случае упрощается и принимает вид

$$f^{(\text{ТМС})}(x, Q^2) = f(x, Q^2) + \frac{x^2 m_N^2}{Q^2} \left\{ 6x \int_x^1 dy \frac{f(y, Q^2)}{y^2} - x \frac{\partial}{\partial x} f(x, Q^2) - 4f(x, Q^2) \right\}. \quad (25.8)$$

При этом КХД становится неприменимой, когда поправки второго порядка

$$\sim \left\{ \frac{x^3 \nu(\alpha_s) m_N^2}{(1-x) Q^2} \right\}^2$$

велики. Другими словами, мы принимаем эту величину в качестве параметра, характеризующего допустимую ошибку вычислений: трудно утверждать, что следует учитывать поправки порядка m_N^4/Q^4 и в то же время пренебрегать поправками порядка M^2/Q^2 .

§ 26. Непертурбативные эффекты в e^+e^- -аннигиляции и операторы высших твистов в процессах глубоконеупругого рассеяния

Мы рассматриваем оба эти эффекта в одном параграфе потому, что, с нашей точки зрения, они связаны друг с другом. Начнем с обсуждения непертурбативных (нетероретиковозмущенческих) эффектов. Как уже обсуждалось в § 15, для этого необходимо рассмотреть величину $\Pi^{\mu\nu}$, входящую в выражение (15.4)

Рассмотрим хронологическое произведение

$$TJ^\mu(x)J^\nu(0)$$

с точки зрения операторного разложения. При малых x для него можно записать разложение по операторному базису, которое в импульсном пространстве с учетом обозначения $Q^2 = -q^2$ имеет вид

$$\begin{aligned} & i \int d^4x e^{iq \cdot x} TJ^\mu(x)J^\nu(0) \\ &= (-g^{\mu\nu} q^2 + q^\mu q^\nu) \\ & \times \left\{ C_0[Q^2/\nu^2, g(\nu)] \cdot 1 + \sum_f C_f[Q^2/\nu^2, g(\nu)] m_f : \bar{q}_f(0) q_f(0) : \right. \\ & \left. + C_G[Q^2/\nu^2, g(\nu)] \alpha_s : \sum_a G_a^{\mu\nu}(0) G_{a\mu\nu}(0) : + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (26.1)$$

В § 15 мы рассматривали только первый член разложения C_0 1. Это было сделано по двум причинам. Во-первых, основываясь только на размерном анализе, можно ожидать, что коэффициенты C_f и C_G ведут себя следующим образом:

$$C_f \approx \frac{(\text{constant})}{Q^4}, \quad C_G \approx \frac{(\text{constant})}{Q^4}. \quad (26.2)$$

Во-вторых, во всех порядках теории возмущений

$$\langle : \bar{q} q : \rangle_0 = 0, \quad \langle : G^2 : \rangle_0 = 0. \quad (26.3)$$

Однако, как будет показано ниже (см. § 30 и последующие параграфы), физический вакуум не совпадает с вакуумом теории возмущений, а должен содержать ряд непертурбативных эффектов. Используем индекс *vac* для обозначения физического вакуума. Весьма вероятно, что в реальном физическом мире выполняются неравенства

$$\langle : \bar{q} q : \rangle_{\text{vac}} \neq 0, \quad \langle : G^2 : \rangle_{\text{vac}} \neq 0.$$

Вернемся к разложению (26.1). При $Q^2 \rightarrow \infty$ для любого n член $\{1/\log(Q^2/\Lambda^2)\}^n$ убывает *медленнее*, чем члены вида $(M^2/Q^2)^r$, и, следовательно, превосходит их. Но могут существовать промежуточные области, где, например, члены (26.2) столь же важны, как и поправки второго порядка к коэффициенту C_0 , который является чисто пертурбативным членом. Таким образом, при практическом применении операторного разложения¹⁾ полезно рассмотреть все выражение (26.1) в целом.

Результат для коэффициента C_0 нам уже известен:

$$\begin{aligned} C_0(Q^2/\nu^2; g(\nu), \nu) \\ = 3 \sum_f Q_f^2 \frac{-1}{12\pi^2} \left\{ \log \frac{-q^2}{\nu^2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{4C_F}{\beta_0} \log \log \frac{-q^2}{\nu^2} + \dots \right\} \\ + O\left(\frac{m_f^2}{Q^2}\right). \end{aligned} \quad (26.4)$$

Следует отметить, что в вычислениях § 15 пренебрегалось пертурбативными поправками, обусловленными массами кварков; им соответствуют члены $O(m_f^2/Q^2)$ в разложении (26.4). Может показаться необоснованным учет

¹⁾ Некоторые приложения можно найти в подробных основополагающих работах [229, 230].

старших членов в разложении (26.2), в то время как членами вида m_f^2/Q^2 пренебрегают. Члены m_f^2/Q^2 действительно очень важны при расчетах процессов с участием тяжелых кварков c и b ; их учет не представляет трудностей; пример такого расчета можно найти в § 28. Что касается легких кварков (u , d и s), то эффективная масса s -кварка $m_s \approx 200$ мэВ при $Q^2 \geq 2$ ГэВ². Поэтому такими поправками можно пренебречь; члены m_f^2/Q^2 при соответствующих значениях Q^2 много меньше других членов.

Коэффициенты C_f и C_G можно найти, используя стандартные методы вычислений; детали для типичного случая приведены в § 36 (см. (36.4) — (36.8)). Выражения для этих коэффициентов имеют вид [229, 230]

$$C_f = \frac{2}{3} Q_f^2 \frac{1}{Q^4}, \quad C_G = (3 \sum Q_f^2) \frac{1}{36\pi Q^4}. \quad (26.5)$$

Важно понимать, что аномальные размерности комбинаций $m : qq$ и $\alpha_s : G^2$: в низшем порядке возмущений равны нулю, поэтому коэффициенты C_f и C_G не зависят от параметра v . Для величины $m : \bar{q}q$: это можно доказать, объединяя результаты вычисления перенормировочного множителя Z_m (§ 14) с результатом вычисления множителя Z_M (§ 13). Для величины $\alpha_s : G^2$: соответствующее доказательство можно найти в работе [183, 243]. Исходя из сказанного, находим

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu} = & \left(3 \sum_f Q_f^2 \right) (-q^2 g^{\mu\nu} + q^\mu q^\nu) \\ & \times \left\{ -\frac{1}{12\pi^2} \left[\log \frac{Q^2}{\nu^2} + \frac{3C_F}{\beta_0} \log \log \frac{Q^2}{\nu^2} + \dots + O\left(\frac{m_f^2}{Q^2}\right) \right] \right. \\ & \left. + \frac{2}{3} \cdot \frac{m_f \langle : \bar{q}_f(0) q_f(0) : \rangle_{\text{vac}}}{Q^4} + \frac{1}{36\pi} \cdot \frac{\alpha_s \langle : G^2(0) : \rangle_{\text{vac}}}{Q^4} + O\left(\frac{M^2}{Q^6}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (26.6)$$

Обратимся теперь к рассмотрению процессов глубоконеупругого рассеяния. При изучении процедуры операторного разложения (§ 19) мы рассматривали операторы только низших твистов. Что касается процесса e^+e^- -аннигиляции, то, по-видимому, здесь существуют области значений Q^2 , в которых поправки от операторов высших твистов оказываются сравнимыми, например, с пертурбативными поправками второго порядка. Некоторые вклады от операторов высших твистов приводят к поправкам на массу мишени, другие — к поправкам, обусловленным кварковыми массами (см. [23, 143, 202]). Кроме того, существуют поправки от операторов высших твистов, приводящие к новым динамическим эффектам, связанным с "изначальным" поперечным импульсом кварков внутри нуклона или с конечностью размера

нуклона. Учет операторов высших твистов представляет собой гораздо более трудную задачу, чем вычисления с учетом операторов только низших твистов. Например, можно доказать, что смешивание полей глюонов и дучхов (19.2) для операторов низших твистов не происходит, но для операторов высших твистов имеет место. Кроме того, вследствие смешивания операторы высших твистов приводят к появлению новых, неизвестных матричных элементов, подобных коэффициенту A в выражении (19.11), только более сложных. Все это обуславливает тот факт, что способы учета операторов высших твистов еще только развиваются и, по-видимому, будут находиться в этой фазе достаточно долго. Пока выполнены только частные теоретические вычисления (см., например, [153]) и выдвинуты эвристические аргументы [90, 91]. Последние показывают, что вклад от операторов высших твистов, вероятно, имеет вид

$$f^{(HT)}(x, Q^2) \approx \frac{k_1}{Q^2} \cdot \frac{x}{1-x} f^{(2)}(x, Q^2) + \frac{k_2}{Q^2} f^{(2)}(x, Q^2), \quad (26.7)$$

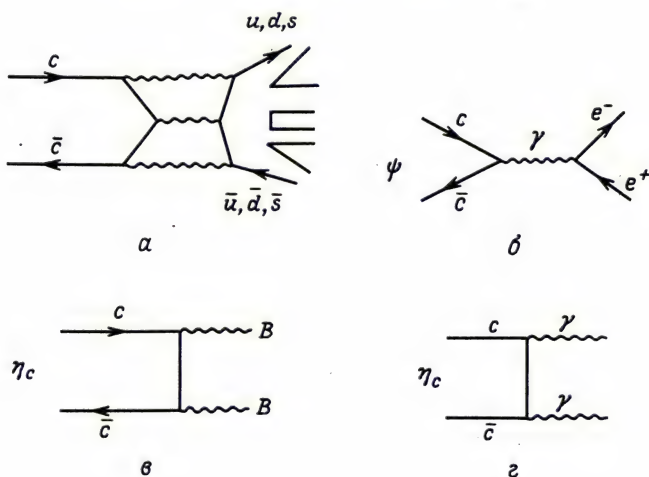
где $f^{(2)}$ — структурная функция, при вычислении которой учитываются операторы только твиста два. Коэффициенты k_1 и k_2 являются феноменологическими параметрами, которые, по-видимому, имеют величины $|k_i| \approx p_i^2 / R_N^{-2}$, где R_N — радиус нуклона¹⁾. Мы не будем углубляться в эти вопросы.

§ 27. Другие процессы

1. Инклюзивные процессы: процессы глубоконеупругого рассеяния при времениподобных передаваемых импульсах; распады, запрещенные правилом ОЦИ; процессы Дреппа — Яна; рассеяние адронов на большие p_t

Если принять во внимание времениподобные передаваемые импульсы, то существует еще ряд процессов глубоконеупругого рассеяния. Наиболее важным из них является процесс $\gamma^* + (\pi, K, \gamma) \rightarrow X$ (X — любые допустимые частицы), который наблюдается в процессе $e^+e^- \rightarrow (\pi, K, \gamma) + X$. Кроме особенностей, общих с процессами глубоконеупругого рассеяния на нуклонах при обычных пространственноподобных передаваемых импульсах, процессы с времениподобными передаваемыми импульсами обладают и рядом специфических черт. Во-первых, и мы имеем дело с аналитическим продолжением на времениподобные передаваемые импульсы (Q^2 отрицательно), общим для всех процессов такого типа. Во-вторых, рассеяние $\gamma^* \gamma \rightarrow X$ обладает той важной осо-

¹⁾ Тот же порядок величины коэффициентов k ($k^{\frac{1}{4}} \approx 0,1 - 0,3$ ГэВ) был получен в расчетах для модели мешков [178]. Подробное изучение эффектов, к которым приводят операторы высших твистов, проведено недавно в работе Ellis R.K., Furmanski W., Petronzio R., CERN preprint TH-3301, 1982 (будет опубликовано в журнале Nuclear Physics B).

Рис. 20. Распады ψ - и η_c -мезонов.

бенностью, что при $x \gg 0$ его можно рассчитать; при этом известна не только эволюция, но и абсолютная нормировка (кроме области $x \approx 0$). Это обусловлено тем, что основная часть процесса рассеяния описывается новым набором операторов, содержащих только поля фотонов, матричные элементы которых известны. Вычисления в первом порядке теории возмущений выполнены в работе [272] (см. также [181, 256], а во втором порядке — в работе [26]. Мы больше не будем рассматривать этот вопрос, подробно излагаемый в обзоре [56], а перейдем к обсуждению распадов, запрещенных правилом Окубо — Цвейга — Иизуки (ОЦИ).

По мнению многих физиков, первый яркий успех концепции асимптотической свободы принесло объяснение узости ψ (J)-резонансов [19, 92]. Это объяснение представляет собой пример применения квантовой хромодинамики для обоснования малости ширин так называемых ОЦИ-запрещенных распадов.

Правило Цвейга [282], или правило ОЦИ [173, 212], гласит, что распады тяжелых резонансов, которые описываются несвязанными кварковыми диаграммами Фейнмана (т.е. диаграммами, которые могут быть связаны только глюонными линиями), подавлены. Это правило работает довольно хорошо для резонансов типа ϕ и f' -мезонов и очень хорошо для ψ - и Υ -частиц. В действительности, чем тяжелее резонанс, тем лучше для него выполняется правило ОЦИ. Рассмотрим, например, ψ -частицу, состоящую из $c\bar{c}$ -кварков. Поскольку самые легкие частицы с открытым чармом (D -мезоны) слишком тяжелы для того, чтобы ψ -частица могла распасться на пару $D\bar{D}$, процесс ψ -адроны по необходимости происходит через глюоны. Согласно квантовым

числам ψ -мезона, его распад может проходить по меньшей мере через три глюона (рис. 20, а), поэтому адронная ширина распада $\Gamma(\psi \rightarrow \text{адроны}) \approx \alpha_s^3 m_\psi$. Можно доказать, что соответствующей константой является бегущая константа связи, взятая при $Q^2 = -m_\psi^2$; поэтому по аналогии с формулой для ширины трехфотонного распада позитрония с точностью до замены $\alpha \rightarrow \alpha_s$ и введения цветового фактора C_D для ширины трехглюонного распада ψ -частицы получаем

$$\Gamma(\psi \rightarrow \text{адроны}) = \frac{64 C_D}{9} (\pi^2 - 9) \frac{|^3S_1(0)|^2}{m_\psi^2} [\alpha_s(-m_\psi^2)]^3, \quad (27.1)$$

$$C_D = \frac{1}{16n_c} \sum_{abc} d_{abc}^2 = \frac{5}{18}.$$

Здесь $^3S_1(0)$ — волновая функция при $c\bar{c}$ при $r = 0$, где r — расстояние между кварком и антикварком. Можно показать, что эта формула справедлива в ведущем и следующем за ним порядках теории возмущений КХД, причем поправки к ней также могут быть вычислены (см. ниже). Значение $|^3S_1(0)|$ можно получить в рамках той или иной модели; его можно найти и независимо от модели, если взять отношение адронной и лептонной ширин распадов (рис. 20, б), из которого множитель $|^3S_1(0)|$ выпадает. Для этого отношения в ведущем порядке теории возмущений получаем

$$B_{h/l}^\psi \equiv \frac{\Gamma^0(\psi \rightarrow \text{hadrons})}{\Gamma^0(\psi \rightarrow e^+ e^-)} = \frac{10(\pi^2 - 9)\alpha_s^3(-m_\psi^2)}{81\pi\alpha Q_c^2}. \quad (27.2)$$

Недавно были вычислены наиболее важные поправки второго порядка по константе взаимодействия α_s , которые складываются из поправок к лептонной ширине распада Γ_l [22]

$$\Gamma_l = \Gamma_l^0 \left\{ 1 - \frac{16}{3} \cdot \frac{\alpha_s(m_\psi^2)}{\pi} \right\},$$

и поправок к адронной ширине Γ_h [195]

$$\Gamma_h = \Gamma_h^0 \left\{ 1 + (3.8 \pm 0.5) \frac{\alpha_s(m_\psi^2)}{\pi} \right\}.$$

Ошибка связана с тем, что вычисления проводились с помощью численных методов. Кроме того, имеются еще поправки, обусловленные конечностью массы мезона (фазовый объем, поправки на скорость движения кварков и т.д.). Они велики для ϕ -мезона ($\sim 70\%$), меньше для ψ -частицы ($\sim 20\%$) и малы для Y -частицы ($\sim 16\%$). Тогда для векторного мезона $V = \psi$ или Y можно написать следующую формулу для отношения адронной и лептонной ширин рас-

падов с учетом поправок:

$$B_{h/1}^V = \frac{10(\pi^2 - 9)\alpha_s^3(m_V^2)}{81\pi\alpha Q_q^2} \left\{ 1 + (9.1 \pm 0.5) \frac{\alpha_s(m_V^2)}{\pi} - \frac{M_V^2}{m_V^2} \right\}.$$

Для сравнения с экспериментом, по-видимому, лучше всего рассматривать отношение M_V^2/m_V^2 как *ошибку*, требуя, чтобы оно имело указанный выше порядок величины. Действуя так, найдем, что для распада Y -мезона параметр обрезания $\Lambda = 120^{+60}_{-30}$ МэВ, а для распада ψ -частицы $\Lambda = 60^{+100}_{-10}$ МэВ. Согласие между этими двумя результатами представляет собой нетривиальную проверку квантовой хромодинамики, так же как и тот факт, что оба этих значения параметра Λ близки к результатам, полученным из данных по глубоко неупругому рассеянию в § 24. (Чтобы получить такие значения параметра Λ , надо учесть поправки $O(\alpha)$.)

Распады псевдоскалярных резонансов (подобных η_c -мезону) обладают сходными свойствами: распад происходит через два глюона (рис. 20, *б*) и отношение адронной ширины к двухфотонной ширине распада $\eta_c \rightarrow \gamma\gamma$ (рис. 20, *в*) равно

$$\frac{\Gamma(\eta_c \rightarrow \text{адроны})}{\Gamma(\eta_c \rightarrow \gamma\gamma)} = \frac{2}{9Q_c^4} \left(\frac{\alpha_s(m_c^2)}{\alpha} \right)^2. \quad (27.3)$$

Поправки второго порядка для этого случая вычислены в работе [24]; они также оказались довольно большими. Для достаточно тяжелых кварков можно получить строгие результаты не только для отношений типа (27.2) и (27.3), но и для самих ширин эксклюзивных распадов [102].

Перейдем к механизму Дрелла — Яна [100]. В рамках этого механизма кварк из одного адрона и антикварк из другого, сталкивающегося с первым адрона аннигилируют в виртуальный фотон с большой инвариантной массой $-Q^2$, который затем превращается в пару e^+e^- или $\mu^+\mu^-$ (рис. 21). Применяя формализм Алтарелли — Паризи, можно показать, что по крайней мере в ведущем логарифмическом приближении сечение рассеяния можно записать в виде (см. [108, 235])

$$\frac{d\sigma}{dQ^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{9Q^2} \sum_f Q_f^2 \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 x_1 x_2 \delta(x_1 x_2 - Q^2/s) \times \{ q_{f,h_1}(x_1, Q^2) \bar{q}_{f,h_2}(x_2, Q^2) + \bar{q}_{f,h_1}(x_1, Q^2) q_{f,h_2}(x_2, Q^2) \}, \quad (27.4)$$

где $q\bar{q}$ — функции распределения, введенные в § 22, а $s = (p_{h_1} + p_{h_2})^2$ — полная энергия сталкивающихся адронов в системе центра масс.¹⁾ В этом процессе очень важны недавно вычисленные поправки второго порядка¹⁾; они включают

¹⁾ См. работы [13, 14, 124, 170, 184]. Это вычисление было завершено в работах [166] и Ellis, Martinelli, Petronzio, CERN preprint TH-3186, 1982 (будет опубликовано).

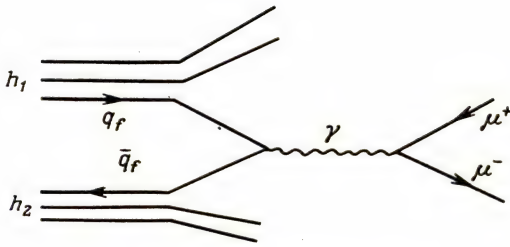


Рис. 21. Механизм Дрелла — Яна.

эффекты продолжения на времениподобные импульсы фотона. Вычисления чрезвычайно осложняются взаимосвязанностью массовых сингулярностей. Указанные поправки изменяют формулу (27.4), в частности приводят к появлению в ней множителя

$$1 + \frac{\alpha_s(Q^2)}{4\pi} \cdot \frac{8}{3} \left(1 + \frac{4\pi^2}{3}\right), \quad (27.5)$$

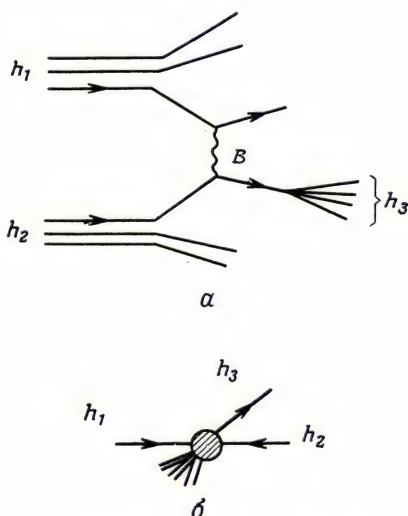
где π^2 возникает в результате аналитического продолжения. Поэтому поправки очень велики (порядка единицы), так что, по-видимому, при современных энергиях КХД позволяет дать только качественные оценки. Но положение может быть не столь удручающим, если верно предположение, что члены $\sim \pi^2$ суммируются в экспоненту и множитель (27.5) можно заменить выражением

$$e^{8\pi\alpha_s(Q^2)/3} \left\{ 1 + \frac{8}{3} \cdot \frac{\alpha_s(Q^2)}{4\pi} \right\}, \quad (27.6)$$

в котором экспоненциальный множитель точен во всех порядках теории возмущений. Если это действительно так, то возникает хорошее количественное согласие с экспериментом.

Еще в меньшей степени непосредственно применимы методы квантовой хромодинамики к процессам рассеяния адронов на большие p_t (рис. 22). Экспериментальная ситуация изображена на рис. 22, б: рассеиваются два адрона h_1 и h_2 и регистрируется адрон h_3 , который имеет большой поперечный импульс относительно оси соударения. Можно доказать, что этот процесс имеет механизм, представленный диаграммой рис. 22, а. Сечение рассеяния для этого процесса в низшем порядке теории возмущений имеет вид

$$\frac{d\sigma(h_1 + h_2 \rightarrow h_3 + \text{all})}{d^3p_{h_3}} = \frac{1}{\pi} E_{h_3} \sum \int_0^1 dx_a \int_0^1 dx_b \int_0^1 dx_{b'} q_{a,h_1}(x_a) q_{b,h_2}(x_b) q_{b',h_3}(x_{b'}) \times \frac{s' \delta(s' + t' + u')}{x_b'^2} \cdot \frac{d\sigma(a + b \rightarrow a' + b')}{dt'}, \quad (27.7)$$

Рис. 22. Рассеяние адронов на большие p_t .

где использованы обозначения

$$s' = x_a x_b s, \quad t' = x_a t / x_b, \quad u' = x_b u / x_b,$$

$$s = (p_{h_1} + p_{h_2})^2, \quad t = (p_{h_1} - p_{h_3})^2, \quad u = (p_{h_1} + p_{h_3})^2.$$

Элементарное сечение рассеяния $d\sigma/dt'$ следует вычислять в низшем порядке теории возмущений. В формуле (27.7) функция распределения обозначена как $q(x)$, а не $q(x, Q^2)$, так как не ясно (по крайней мере нам), какое нужно использовать значение Q^2 и какова область применимости выражения (27.7). Рассмотрению таких процессов посвящены, например, работы [109, 155, 176, 226].

2. Струи

Обратимся к изучению струй. Струи представляют собой предмет самостоятельного изучения, поэтому мы дадим лишь самый краткий обзор сложившейся ситуации. Основное замечание состоит в том, что, например, для процесса e^+e^- -аннигиляции ведущей диаграммой является абсорбционная часть диаграммы рис. 23, а, а именно квадрат диаграммы рис. 23, б. Если бы кварки являлись реальными частицами, отсюда следовало бы, что сечение рассеяния имеет вид

$$\frac{d\sigma(e^+e^- \rightarrow qq)}{d\Omega} \approx (1 + \cos^2\theta) \{1 + O(\alpha_s)\}.$$

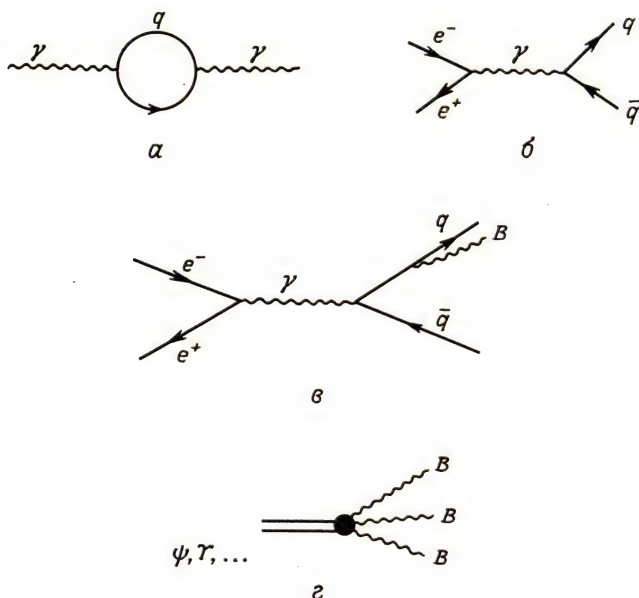


Рис. 23. Струи.

Но этого быть не может, поскольку, как мы видели, процессы с коллинеарными частицами (рис. 23, в) приводят к расходимостям. Однако инклюзивные сечения рассеяния, по-видимому, конечны даже в КХД¹⁾. Технический прием состоит в том, что рассматривают не сами процессы, в которых кварки и (или) глюоны имеют определенные импульсы $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n$ и которые, вообще говоря, приводят к расходящимся результатам, а интегрируют сечения рассеяния с некоторыми гладкими функциями $\phi(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n)$, т.е. рассматривают сечения рассеяния в интервале конечных состояний. Как правило, изучают величину

$$\sigma(\langle \vec{p}_1 \rangle, \dots, \langle \vec{p}_n \rangle) = \int \frac{d\vec{p}_1}{2p_1^0} \dots \frac{d\vec{p}_n}{2p_n^0} \phi(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n) \sigma(i \rightarrow \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n),$$

где функция $\phi(\vec{p})$ имеет острый максимум в окрестности среднего значения импульса $\langle \vec{p} \rangle$.

Поскольку кварки и глюоны, конечно, непосредственно не детектируются, необходимо разработать метод, позволяющий установить струйный характер сече-

¹⁾ В квантовой электродинамике это утверждение известно как теорема Блоха — Нордсика [42]. В КХД подобные результаты следуют из обобщений [191] теоремы Киношита [182].

ний такого рода процессов. Этот метод заключается в основном в измерении наблюдаемых величин, конечных в инфракрасном пределе [236], которые отражают отклонения от сферической симметрии распределения по импульсам в конечных состояниях. Такой характеристикой является, например, "траст" (thrust) T [115]:

$$T = \max_{\vec{v}} \frac{\sum |\vec{p}_i \cdot \vec{v}|}{\sum |\vec{p}_i|};$$

для двухструйного события $T = 1$, а для сферически-симметричного события $T = 1/2$. Тогда можно ожидать, что в процессе e^+e^- -аннигиляции $T \approx 1 - O(\alpha_s)$.

Мы не будем углубляться в изучение струй, а отсылаем читателя к работе [88], содержащей всестороннее рассмотрение двух- и главным образом трехструйных событий (как в распадах Υ -мезонов; рис. 23, z), к работе [200], посвященной струям в процессах глубоконеупругого рассеяния, или к обзору [109]. Добавим только, что двух- и трехструйные события наблюдались в экспериментах; при этом трехструйные события дают прямое доказательство существования глюонов и кварк-глюонного взаимодействия. Полученные для этих процессов [10] значения константы взаимодействия $\alpha_s(Q^2 \approx (35 \text{ ГэВ})^2) \approx 0,125 \pm 0,01$ и параметра обрезания $\Lambda = 110^{+70}_{-50}$ МэВ находятся во впечатляющем согласии с полученными ранее значениями.

3. Эксклюзивные процессы

Рассмотрим в несколько упрощенном виде вопрос о пионном формфакторе; мы надеемся, что этого окажется достаточно, чтобы распространить данный подход на изучение других процессов, для которых будут приведены лишь окончательные результаты.

Пионный формфактор F_π определим следующим соотношением:

$$\begin{aligned} V^\mu(p_1, p_2) &= (2\pi)^3 \langle \pi(p_2) | J_{em}^\mu(0) | \pi(p_1) \rangle \\ &= (p_1^\mu + p_2^\mu) F_\pi(q^2), \quad q = p_2 - p_1, \end{aligned} \quad (27.8)$$

где функция F_π нормирована на единицу: $F_\pi(0) = 1$. Опуская индекс em для тока J^μ , перепишем это соотношение в виде

$$V^\mu(p_1, p_2) = (2\pi)^3 \langle \pi(p_2) | T J_0^\mu(0) e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{int}^0(x)} | \pi(p_1) \rangle.$$

Во втором порядке теории возмущений отсюда следует соотношение как

обычно, $q_u^0 \equiv q_0$, $B_u^0 \equiv B_0, \dots$ — свободные поля)

$$V^\mu(p_1, p_2) = -(2\pi)^3 \frac{g^2}{2!} \sum_{f=u,d} Q_f \int d^4x d^4y \langle \pi(p_2) | T \bar{q}_{f0}(0) \gamma^\mu q_{f0}(0) \\ \times \sum_{a,b} \{ \bar{u}_0(x) \gamma^a t^a u_0(x) \bar{d}_0(y) \gamma^a t^b d_0(y) + (x \leftrightarrow y) \} B_{0a}^a(x) \\ \times B_{0b}^b(y) | \pi(p_1) \rangle. \quad (27.9)$$

Различные комбинации порождают диаграммы рис. 24, а и б. Члены, соответствующие диаграммам рис. 24, а, опущены, так как они не дают вклада в конечный результат. Используя для обозначения цветовых индексов символы i, j, k , а в качестве дираковских индексов символы α, β и δ и опуская индекс 0, обозначающий свободные поля, вклад диаграммы рис. 24, б можно записать в виде

$$V^\mu(p_1, p_2) = -(2\pi)^3 g^2 \sum \int d^4x d^4y \langle \pi(p_2) | \bar{u}_\alpha^i(0) d_{\delta'}^{k'}(y) \gamma_{\alpha\alpha'}^\mu S_{\alpha'\beta}(-x) t_{ii'}^a t_{kk'}^b \\ \times \gamma_{\beta\beta'}^\rho \gamma_{\delta\delta'}^\sigma D_{\rho\sigma}(x-y) \delta_{ab} \bar{u}_{\beta'}^{i'}(x) \bar{d}_\delta^k(y) | \pi(p_1) \rangle + \text{"кросс"-член},$$

где "кросс" обозначает свертку с другой комбинацией индексов. Можно произвести пространственно-временной сдвиг на величину y . Тогда получаем ($z = x - y$)

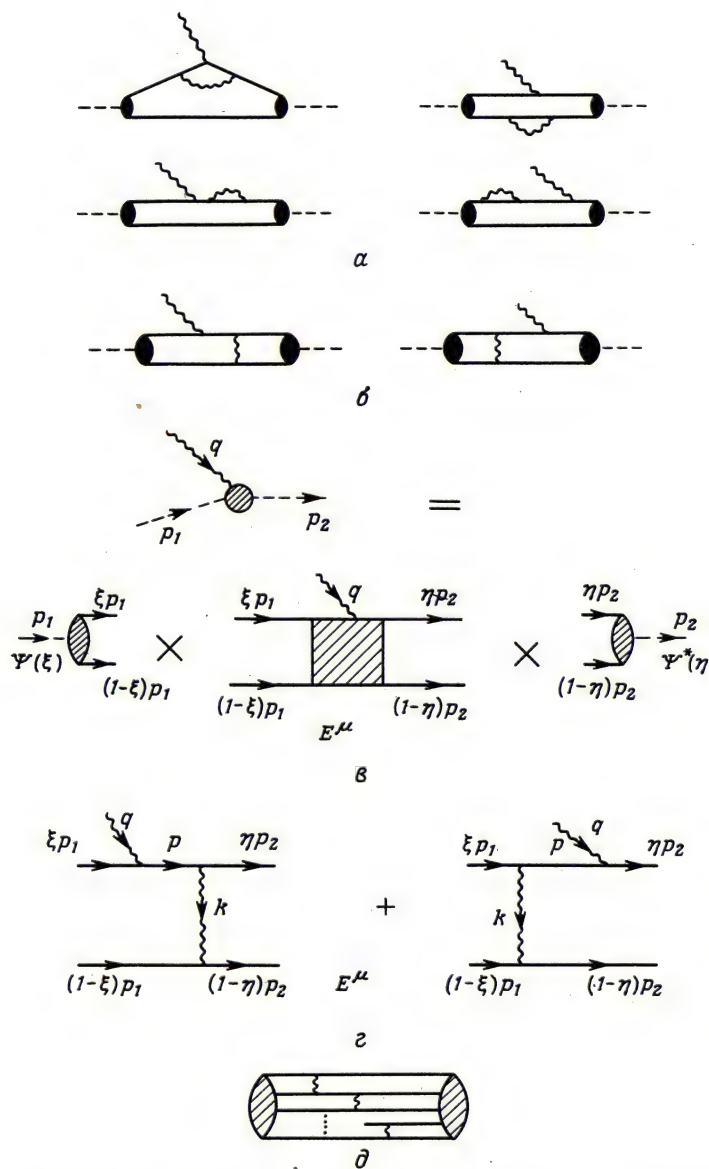
$$V^\mu(p_1, p_2) = (2\pi)^3 g^2 \sum \int \frac{d^4z}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4y}{(2\pi)^4} \int d^4k \int d^4p e^{iz \cdot (p-k)} e^{iy \cdot (p+p_2-p_1)} \\ \times \langle \pi(p_2) | \bar{u}_\alpha^i(-y) d_{\delta'}^{k'}(0) \sum_F | F \rangle \langle F | u_{\beta'}^{i'}(z) \bar{d}_\delta^k(0) | \pi(p_2) \rangle \gamma_{\alpha\alpha'}^\mu \\ \times \frac{-\not{p}_{\alpha'\beta}}{p^2 k^2} \gamma_{\beta\beta'}^\rho \gamma_{\delta\delta'}^\sigma g_{\rho\sigma} t_{ii'}^c t_{kk'}^c + (p_1 \leftrightarrow p_2),$$

где $(p_1 \leftrightarrow p_2)$ возникает из "кросс"-члена. Вклад калибровочных членов явно не выписан, так как в ведущем порядке теории возмущений он обращается в нуль. При получении последнего выражения введен полный набор состояний; в ведущем порядке вносят вклад только вакуумные состояния:

$$\sum_F | F \rangle \langle F | \simeq | 0 \rangle \langle 0 | + O(\alpha_s).$$

Глюонный пропагатор $D_{\rho\sigma}$ использован в калибровке Ферми — Фейнмана, но результат (после добавления члена $p_1 \leftrightarrow p_2$), конечно, является калибровочно-инвариантным. Далее в случае трех цветов (число цветов $n_c = 3$)

$$u_{\beta'}^i(z) \bar{d}_\delta^k(0) = \frac{\delta_{ik}}{4n_c} (\gamma^\lambda \gamma_5)_{\beta'\delta} \bar{d}(0) \gamma_\lambda \gamma_5 u(z) - \frac{\delta_{ik}}{4n_c} (\gamma_5)_{\beta'\delta} \bar{d}(0) \gamma_5 u(z) + \dots; \quad (27.10)$$


 Рис. 24. Диаграммы, описывающие эксклюзивные процессы ($\alpha - \gamma$ — пионный форм-фактор).

другие члены не дают вклада, так как пион представляет собой синглетное по цвету псевдоскалярное состояние. В самом деле, оператор $\bar{d}\gamma_5 u$ является оператором твиста 3 и, следовательно, в ведущем порядке теории возмущений может быть опущен. Таким образом, получаем

$$\begin{aligned}
 V^\mu(p_1, p_2) &= (2\pi)^3 \frac{C_F g^2}{48} \int \frac{d^4 z}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 y}{(2\pi)^4} \int d^4 k \int d^4 p e^{iz \cdot (p-k)} e^{-iy \cdot (p+p_2-p_1)} \\
 &\times \frac{\text{Tr} \gamma^\mu \not{p} \gamma^\rho \gamma^\lambda \gamma_5 \gamma_\rho \gamma^\tau \gamma_5}{p^2 k^2} \langle 0 | \bar{d}(0) \gamma_\lambda \gamma_5 u(z) | \pi(p_1) \rangle \\
 &\times \langle \pi(p_2) | \bar{u}(y) \gamma_\tau \gamma_5 d(0) | 0 \rangle + (p_1 \leftrightarrow p_2).
 \end{aligned} \quad (27.11)$$

Сосредоточим внимание на вычислении членов $\langle 0 | \dots | \pi \rangle$. Их можно разложить в ряд по степеням переменных z и y : например,

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | \bar{d}(0) \gamma_\lambda \gamma_5 u(z) | \pi(p_1) \rangle \\
 = \sum_n \frac{z^{\mu_1} \dots z^{\mu_n}}{n!} \mathcal{S} \langle 0 | \bar{d}(0) \gamma_\lambda \gamma_5 D_{\mu_1} \dots D_{\mu_n} u(0) | \pi(p_1) \rangle;
 \end{aligned} \quad (27.12 \text{ а})$$

если пренебречь членами, пропорциональными массе пиона, то получаем

$$(2\pi)^{3/2} \langle 0 | \bar{d}(0) \gamma_\lambda \gamma_5 D_{\mu_1} \dots D_{\mu_n} u(0) | \pi(p_1) \rangle \equiv i^{n+1} p_{1\lambda} p_{1\mu_1} \dots p_{1\mu_n} A_n. \quad (27.12 \text{ б})$$

Все выкладки были выполнены формально. После перенормировки надо заменить константу связи g на бегущую константу $g(v^2)$ и учесть, что множитель A_n приобретает зависимость от v : $A_n = A_n(v^2)$. Чтобы избежать появления логарифмических членов $\log(Q^2/v^2)$, выберем параметр $v^2 = Q^2 = -(p_2 - p_1)^2$. Если теперь "партонную волновую функцию" Ψ определить в виде

$$\int_0^1 d\xi \xi^n \Psi = A_n, \quad (27.12 \text{ в})$$

то выражение (27.11) можно представить в физически очень наглядном виде

$$(2\pi)^{3/2} \langle 0 | \bar{d}(0) \gamma_\lambda \gamma_5 u(z) | \pi(p_1) \rangle = i p_{1\lambda} \int_0^1 d\xi \Psi(\xi, v^2) e^{i\xi p_1 \cdot z}, \quad (27.13)$$

и, проведя в (27.11) интегрирование по переменным z, y, k, p , получить следующий результат:

$$\begin{aligned}
 V^\mu(p_1, p_2) &= \frac{C_F g^2(v)}{48} \int_0^1 d\xi \Psi(\xi, v^2) \int_0^1 d\eta \Psi^*(\eta, v^2) \frac{\text{Tr} \gamma^\mu \not{p} \gamma^\rho \not{p}_1 \gamma_5 \gamma_\rho \not{p}_2 \gamma_5}{p^2 k^2} \\
 &+ (p_1 \leftrightarrow p_2),
 \end{aligned} \quad (27.14 \text{ а})$$

где

$$p = p_1 - (1 - \eta)p_2,$$

$$k = (1 - \eta)p_2 - (1 - \xi)p_1. \quad (27.14 б)$$

Таким образом, нам удалось разбить вершину на "мягкую часть", описываемую волновыми функциями Ψ и Ψ^* , и на "жесткую часть" E^μ (рис. 24, а и в). Переменные ξ и η описывают долю импульса, приходящуюся на каждый кварк. Вычислив след в формуле (27.14), приходим к окончательному результату

$$F_\pi(q^2) = \frac{4\pi C_F \alpha_s(Q^2)}{6Q^2} \left| \int_0^1 d\xi \frac{\Psi(\xi, Q^2)}{1 - \xi} \right|^2 + O\left(\frac{M_\pi^2}{Q^2}\right) + O(\alpha_s^2),$$

$$Q^2 \equiv -q^2. \quad (27.15)$$

Последняя задача состоит в вычислении зависимости волновой функции Ψ от Q^2 . Операторы, которые определяют функцию Ψ с помощью уравнений (27.12), аналогичны операторам, определяющим несинглетную часть структурных функций в процессах глубоконеупругого рассеяния (§ 19, 20). Но есть и некоторые дополнительные трудности: ввиду недиагонального характера матричных элементов суммарные расходимости приводят к ненулевому вкладу. Операторы $N_{A,n,k}^{\lambda\mu_1 \dots \mu_n}$, $k = 0, \dots, n$,

$$N_{A,n,k}^{\lambda\mu_1 \dots \mu_n} = \partial^{\mu_{k+1}} \dots \partial^{\mu_n} \bar{d}(0) \gamma^\lambda \gamma_5 D^{\mu_1} \dots D^{\mu_k} u(0) \quad (27.16)$$

при проведении перенормировок преобразуются друг через друга по формуле

$$N_{A,n,k} \rightarrow \sum_{k'} Z_{n+1,k'} N_{A,n,k'}. \quad (27.17 а)$$

При $k = n$ элементы матрицы $Z_{n+1,n}$ совпадают с элементами, вычисленными в § 20:

$$Z_{n+1,n} = 1 + \frac{g^2 N_c}{16\pi^2} C_F \left\{ 4S_1(n+1) - 3 - \frac{2}{(n+1)(n+2)} \right\}; \quad (27.17 б)$$

при $k \leq n-1$ они имеют значения

$$Z_{n+1,k} = \frac{g^2 N_c}{16\pi^2} C_F \left\{ \frac{2}{n+2} - \frac{2}{n-k} \right\}. \quad (27.17 в)$$

Чтобы получить операторы, обладающие определенным поведением в пределе $Q^2 \rightarrow \infty$ ¹⁾, нужно диагонализировать матрицу Z . Пусть этого можно достиг-

¹⁾ Красивый альтернативный метод, основанный на свойствах конформной инвариантности, приведен в работе [117].

нать при помощи матрицы S ; тогда, обозначив через \hat{A}_k диагональные матрицы, получаем соотношение

$$A_n(Q^2) = \sum_{k=0}^n S_{nk} \hat{A}_k(Q^2). \quad (27.18)$$

Аномальные размерности матриц \hat{A}_k представляют собой собственные значения матрицы Z . Но из треугольного характера матрицы Z следует, что ее собственные значения являются просто ее диагональными элементами. Следовательно, в пределе $Q^2 \rightarrow \infty$ имеем

$$\hat{A}_k(Q^2) \underset{Q^2 \rightarrow \infty}{\approx} [\alpha_s(Q^2)]^{d_{NS}(k+1)} \hat{A}_{k0}.$$

В ведущем порядке теории возмущений, учитывая неравенство $d_{NS}(k+1) > d_{NS}(1) = 0$, нужно сохранить только один член в (27.18), так что получаем результат

$$A_n(Q^2) \underset{Q^2 \rightarrow \infty}{\rightarrow} S_{n0} \hat{A}_{00},$$

откуда следует предельное соотношение

$$\int_0^1 d\xi \frac{\Psi(\xi, Q^2)}{1-\xi} \underset{Q^2 \rightarrow \infty}{\rightarrow} \hat{A}_{00} \sum_{n=0}^{\infty} S_{n0}.$$

Легко убедиться, что элементы S_{n0} матрицы S имеет вид

$$S_{n0} = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}.$$

Кроме того, известен также элемент \hat{A}_{00} . Из уравнений, основанных на гипотезе о частичном сохранении аксиального тока (см. § 31, в частности (31.26)), следует равенство

$$(2\pi)^{3/2} \langle 0 | \bar{d}(0) \gamma^\lambda \gamma_5 u(0) | \pi(p) \rangle = i p^\lambda \sqrt{2} f_\pi, \quad f_\pi \approx 93 \text{ МэВ},$$

поэтому величина

$$A_0 = \int_0^1 d\xi \Psi(\xi, Q^2) = \sqrt{2} f_\pi$$

не зависит от Q^2 . Отсюда получаем $\hat{A}_{00} = 6\sqrt{2} f_\pi$.

Окончательный результат имеет вид¹⁾

$$F_{\pi}(t) \underset{Q^2 \rightarrow \infty}{\approx} \frac{12\pi C_F f_{\pi}^2 \alpha_s(-t)}{-t}. \quad (27.19)$$

Поправки к этой формуле имеют величину $O(\alpha_s^{d_{NS}(3)} = \alpha_s^{0,6})$; в действительности для четных значений n в силу зарядового сопряжения результат оказывается равным нулю.

Пример вычисления пионного формфактора полезен в нескольких отношениях. Из сравнения выражения (27.19) с экспериментальными результатами видно, что теоретическое значение слишком мало. Это, конечно, можно отнести на счет следующих за ведущими пертурбативных поправок. Однако, по-видимому, происходит нечто иное, а именно поправки, связанные с операторами высших твистов, вследствие малости масс кварков u и d становятся чрезвычайными. Действительно, рассмотрим вклад псевдоскалярного члена в выражение (27.10). Смешанный член дает вклады, подавленные по сравнению с выражением (27.19) множителем m_{π}^2/t , и им можно пренебречь; но псевдоскалярно-псевдоскалярный вклад содержит квадрат матричного элемента $\langle 0 | \bar{d} \gamma_5 u | \pi \rangle$, который, как легко убедиться, используя уравнение движения, пропорционален величине $f_{\pi} m_{\pi}^2 / (m_u + m_d)$. Повторяя проведенный выше анализ, получаем результат

$$F_{\pi}(t) = \frac{12\pi C_F f_{\pi}^2 \alpha_s(-t)}{-t} \left\{ 1 + \frac{4m_{\pi}^4 \log(-t/m_{\pi}^2)}{-(\bar{m}_u + \bar{m}_d)^2 t} \right\}. \quad (27.20)$$

Хотя выражение (27.20) при разумном выборе кварковых масс можно привести в согласие с экспериментальными данными, но этот результат трудно принимать всерьез, так как вклады от операторов высших твистов в инфракрасном пределе оказываются расходящимися (фактически мы здесь имеем массовую сингулярность); простая факторизация, использованная при выводе (27.20), здесь не применима. Таким образом, коэффициент перед поправкой пока неизвестен.

"Жесткая" часть пионного формфактора, очевидно, расходится в инфракрасном пределе (член $1/(1-\xi)$ в выражении (27.15)). Но, к счастью, в ведущем порядке теории возмущений выполняется соотношение

$$\int_0^1 d\xi \Psi(\xi, Q^2) \xi^n \underset{Q^2 \rightarrow \infty}{\rightarrow} S_{n0} \hat{A}_{00},$$

¹⁾ В своем изложении мы следуем работам [53, 105, 116]. Тот же результат можно получить, используя так называемую теорию возмущений на световом конусе [54].

откуда следует предельное соотношение

$$\Psi(\xi, Q^2) \xrightarrow{Q^2 \rightarrow \infty} \xi(1 - \xi) \hat{A}_{00},$$

и возможные расходимости сокращаются. Поэтому некоторые эксклюзивные процессы в конечном счете все же поддаются расчетам в рамках простой теории возмущений. Однако, как видно из члена, описывающего в (27.20) вклад операторов твистов, следующих за ведущим, это не всегда справедливо. В действительности для некоторых процессов инфракрасные расходимости появляются уже на уровне операторов ведущего твиста. Например, можно рассмотреть скалярный формфактор

$$D(t) = (2\pi)^{-3} \langle \pi | \sigma_{us}(0) | K^0 \rangle, \quad \sigma_{us}(x) = i \partial_\mu \bar{u}(x) \gamma^\mu s(x). \quad (27.21 \text{ а})$$

Вычисления этой величины аналогичны вычислениям пионного формфактора. Единственное отличие связано с присутствием смешанного псевдоскалярно-аксиально-векторного вклада (номинально высшего твиста), который в действительности является ведущим. Используя соотношения, основанные на частичном сохранении аксиального тока (§ 31), находим

$$D(t) \approx \frac{12 C_F \alpha_s(-t) f_\pi f_K}{-t} \{ (\bar{m}_s^2 - \bar{m}_u^2) + (m_K^2 - m_\pi^2) \} \log \frac{t}{M^2}. \quad (27.21 \text{ б})$$

Здесь первый член имеет аксиально-аксиальный характер, второй описывает вклад смешанных операторов; но оба они в инфракрасном пределе оказываются расходящимися (если использовать простую факторизацию). Эти два примера (вклад операторов следующего за ведущим твиста в пионный формфактор и скалярный формфактор (27.21)) показывают, что в отличие от инклюзивных процессов эксклюзивные процессы чрезвычайно чувствительны к инфракрасным расходимостям, и для каждого конкретного процесса следует проверять, применима ли непосредственно теория возмущений КХД или нет. Учитывая эти замечания, завершим настоящий параграф очень короткой сводкой результатов для некоторых эксклюзивных процессов.

Из примера рассмотрения пионного формфактора можно вывести общее правило: амплитуда эксклюзивного процесса имеет вид (рис. 24, д)

$$\mathcal{A} = \int \phi^+ K \phi,$$

где ϕ — волновая функция связанного состояния B :

$$\phi \approx \langle 0 | T q_1(x_1) \dots q_n(x_n) | B \rangle,$$

ядро уравнения K определяется формулой

$$K \approx \left[\frac{\alpha_s(Q^2)}{Q^2} \right]^{n-1}.$$

Отсюда возникают правила счета [52], согласно которым, например, для нуклонного формфактора получаем знаменитое дипольное поведение

$$F_N \approx \left[\frac{\alpha_s(-t)}{-t} \right]^2,$$

а для дейтона формфактор определяется формулой

$$F_d \approx \left[\frac{\alpha_s(-t)}{-t} \right]^5,$$

которая совпадает с экспериментально полученными результатами. Сечение рассеяния на заданный угол имеет вид

$$\left. \frac{d\sigma(A + B \rightarrow C + D)}{dt} \right|_{\theta \text{ fixed}} \approx \frac{\alpha_s^2(t)}{-t} F_A(t) F_B(t) F_C(t) F_D(t) f(\theta).$$

Дальнейшие подробности и ссылки на литературу можно найти в работе [54]. Многие из этих результатов сформулированы с большей степенью строгости, исходя из ренормгруппового анализа [103] (см. также обзор [101] и цитируемую там литературу).

Глава IV

МАССЫ КВАРКОВ, ЧАСТИЧНОЕ СОХРАНЕНИЕ АКСИАЛЬНОГО ТОКА, КИРАЛЬНАЯ ДИНАМИКА И ВАКУУМ КХД

§ 28. Тяжелые и легкие кварки; теорема Симанзика — Аппелквиста — Каррадзе

Схема перенормировок \overline{MS} не зависит от масс кварков; следовательно, при вычислении таких величин, как ренормгрупповая бета-функция β или аномальная размерность $\gamma^{(n)}$, нужно учитывать кварки всех ароматов. Для простоты сосредоточимся на β -функции и будем проводить выкладки в аксиальной калибровке, так что всю зависимость от квадрата переданного 4-импульса Q^2 можно получить, рассмотрев только глюонный пропагатор. Кроме того, упростим обсуждение, введя в рассмотрение кварки только двух ароматов, один из которых безмассовый $\hat{m}_l = 0$, а другой тяжелый $\hat{m}_h \gg \Lambda$. Тогда в схеме перенормировок \overline{MS} для бегущей константы связи получаем

$$\alpha_s(Q^2, \Lambda^2) = \frac{12\pi}{(33 - 2n_f)\log Q^2/\Lambda^2} \{1 - \dots\}, \quad (28.1)$$

где $n_f = 2$. Естественно предположить, что использование значения $n_f = 2$ приводит к правильному выражению для бегущей константы связи α_s при $Q \gg m_h$, но существует область значений переданного импульса $m_h \gg Q \gg \Lambda$ для которой лучше использовать значение $n_f = 1$ в формуле (28.1). Это становится очевидным, если взять массу тяжелого кварка m_h экстремально большой, например равной 1 г. Ясно, что физика микромира едва ли может зависеть от того, существуют или нет столь массивные частицы.

Это утверждение составляет основное содержание теоремы, доказанной Симанзиком [240] и вновь открытой Аппелквистом и Каррадзе [17]¹⁾, согласно которой в случае $Q \ll m_h$ существованием таких тяжелых кварков можно пренебречь с точностью до членов порядка Q^2/m_h^2 . Формула (28.1) в приведенном выше виде справедлива только в случае $Q^2 \ll m^2$, где m — любая подходящая масса, в частности масса тяжелого кварка m_h . Если мы хотим сохранить функциональную форму (28.1), необходимо допустить иную зависимость от переменной Q^2 , более сложную, чем просто логарифмическая.

¹⁾ В действительности этот результат, по существу, содержался уже в работе [182]. Обсуждение этой теоремы с использованием функциональных методов см. в работе [262].

Так как указанная проблема возникает в результате пренебрежения массами кварков, мы должны вновь вывести формулу (28.1), но с учетом масс кварков. Напоминаем, что бегущая константа связи определялась выражением $\alpha_s = \bar{g}^2/4\pi$, где \bar{g} представляет собой решение уравнений (12.6):

$$\frac{d\bar{g}}{d\log Q/\nu} = \bar{g}\beta(\bar{g}), \quad \bar{g}|_{Q=\nu} = g(\nu), \quad (28.2a)$$

где

$$\frac{vd}{dv} g(\nu) = g(\nu) \beta(g(\nu)), \quad \beta = -Z_g^{-1} \frac{vd}{dv} Z_g. \quad (28.2b)$$

Рассмотрим поведение поперечной части глюонного пропагатора, которую мы обозначим так же, как в выражении (6.9). Введя обозначение $Q/\nu = \lambda$, из уравнений (12.1) и (12.7) получаем

$$D_{tr}(q^2; g(\nu), m(\nu); \nu^2) = D_{tr}(\nu^2; \bar{g}(\lambda), \bar{m}(\lambda); \nu^2) \exp \left\{ - \int_0^{\log \lambda} d\log \lambda' \gamma_D[\bar{g}(\lambda')] \right\}. \quad (28.3)$$

В используемой нами физической калибровке (см. (9.18)) аномальная размерность глюонного пропагатора равна $\gamma_D = 2\beta_0 g^2/16\pi^2$, а, следовательно, поперечная часть глюонного пропагатора определяется выражением

$$D_{tr}(q^2; g(\nu), m(\nu); \nu^2) = \frac{2}{\log Q^2/\nu^2} D_{tr}(\nu^2; \bar{g}(\lambda), \bar{m}(\lambda); \nu^2). \quad (28.4)$$

Рассмотрев пропагатор *в точке* $p = \bar{m}$, получаем следующий результат¹⁾:

$$D_{tr}(\nu^2; \bar{g}(\lambda), \bar{m}(\lambda); \nu^2) = K_\nu + \frac{2\alpha_s(Q^2)T_F}{\pi} \times \int_0^1 dx x(1-x) \log \frac{\bar{m}^2 + x(1-x)\nu^2}{\nu^2},$$

где K_ν — константа. Сначала выберем $\nu = \Lambda$; тогда

$$D_{tr}(q^2; g(\nu), m(\nu); \nu^2) = \frac{2}{\log Q^2/\Lambda^2} \left\{ K + \frac{2\alpha_s(Q^2)T_F}{\pi} \times \int_0^1 dx x(1-x) \log \left[x(1-x) + \frac{\bar{m}^2(Q^2)}{\Lambda^2} \right] \right\} \quad (28.5)$$

¹⁾ Здесь и ниже из выражения для пропагатора исключен общий множитель $1/q^2$.
Прим. перев.

Если $m \gg \Lambda$, то справедливо приближенное равенство

$$D_{tr}(q^2; g(\nu), m(\nu); \nu^2) \approx \left\{ K + \frac{\alpha_s(Q^2) T_F}{\pi} \log \frac{\bar{m}^2(Q^2)}{\Lambda^2} \right\} \frac{2}{\log Q^2/\Lambda^2}. \quad (28.6)$$

Если $m^2 \gg Q^2$, то поправки к константе K в формуле (28.6) велики, и такое приближение становится малоприменимым. Этого и следовало ожидать: схема перенормировок \overline{MS} так же, как и любая другая не зависящая от масс перенормировочная схема (подобная схеме, предложенной в работе [258]), с неизбежностью разрушает сходимость в случае, если существует масса, превышающая характерный масштаб импульсов. Решение этой проблемы заключается в использовании числа кварковых ароматов n_f , зависящего от масштаба импульсов, например¹⁾

$$n_f(Q^2) = \sum_{f=1}^{n_f} \left(1 - \frac{4\hat{m}_f^2}{Q^2} \right)^{1/2} \left(1 + \frac{2\hat{m}_f^2}{Q^2} \right) \theta(Q^2 - 4\hat{m}_f^2). \quad (28.7)$$

Необходимо доказать, что такая процедура последовательна. Что формула (28.7) справедлива для значений Q больших, чем все массы кварков, мы уже знаем; поправки имеют величину $O(\hat{m}_q^2/Q^2)$. Завершим доказательство, показав, что эта формула справедлива и для случая $Q^2 \ll m^2$. Рассмотрим с этой целью выражение для глюонного пропагатора. Отсюда будет ясно, как распространить доказательство на общий случай.

Поскольку вклады кварков и глюонов в выражение для глюонного пропагатора D_{tr} аддитивны, достаточно рассмотреть только первый из них. В ведущем порядке теории возмущений имеем

$$D_{tr}^{(кварки)} = 1 - \frac{\alpha_g}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \log \frac{x(1-x)Q^2 + \hat{m}^2}{\nu^2}. \quad (28.8)$$

В этом порядке необходимости учета перенормировки величин α_g или m не возникает. Для случая $Q^2 \ll \hat{m}^2$ получаем

$$D_{tr}^{(кварки)} = 1 - \frac{\alpha_g}{6\pi} \log \frac{\hat{m}^2}{\nu^2} - \frac{\alpha_g}{30\pi} \cdot \frac{Q^2}{\hat{m}^2}, \quad (28.9)$$

¹⁾ Возможны и другие интерполяционные формулы или процедуры (см. [76] и особенно работу [258], где можно найти подробное обсуждение этого вопроса, включая вычисление зависимости от эффективного значения n_f). Какой из интерполяционных формул пользоваться, в значительной мере безразлично, так как в КХД зависимость всех величин от n_f в области $n_f = 3 - 6$ очень слабая.

т.е. результат, постоянный с точностью до членов $O(Q^2/\hat{m}^2)$. Следовательно, с точностью до этих членов он совпадает с глюонным пропагатором, вычисленным для *нулевого числа ароматов*, но имеет другое значение параметра v'^2 , а именно $v'^2 = v^2 \{1 + \log \hat{m}^2/v^2\}$. Так как физические наблюдаемые не зависят от значения v , тяжелыми кварками, приводящими только к членам $O(Q^2/\hat{m}^2)$, можно пренебречь.

Случай глюонного пропагатора особенно прост; в общем случае поправки имеют величину порядка $\log(\hat{m}^2/Q^2)(Q^2/\hat{m}^2)$.

Теорема "развязки" особенно наглядна в μ -схеме перенормировок. Рассмотрим снова вклад кварков в выражение для глюонного пропагатора. Проводим вычисления во втором порядке теории возмущений и, вспоминая выражение (9.21), получаем

$$D_{u \text{ tr}}^{(\text{кварки})}(q^2) = i + T_F \frac{g^2}{16\pi^2} \left\{ \frac{2}{3} N_c n_f - 4 \int_0^1 dx x(1-x) \times \right. \\ \left. \times \sum_{f=1}^{n_f} \log \frac{m_f^2 - x(1-x)q^2}{v_0^2} \right\} + \dots$$

Напомним, что μ -схема перенормировок возникает, если потребовать выполнения условия $D_{R \text{ tr}}^{(\text{кварки})}(q^2 = -\mu^2) = D_{\text{своб. tr}}(-\mu^2)$, а следовательно, справедливо равенство

$$D_{R \text{ tr}}^{(\text{кварки})}(q^2) = i + T_F \frac{g^2}{16\pi^2} \left\{ -4 \int_0^1 dx x(1-x) \sum_f \log \frac{m_f^2 - x(1-x)q^2}{m_f^2 + x(1-x)\mu^2} \right\}.$$

Положим $Q^2 = -q^2$. В случае, когда $Q^2, \mu^2 \gg m_f^2$, справедливо приближенное равенство

$$\int_0^1 dx x(1-x) \log \frac{m_f^2 + x(1-x)Q^2}{m_f^2 + x(1-x)\mu^2} \simeq \frac{1}{6} \log \frac{Q^2}{\mu^2} + O\left(\frac{m_f^2}{\mu^2}, \frac{m_f^2}{Q^2}\right);$$

для случая $m_f^2 \gg \mu^2, Q^2$ имеем

$$\int_0^1 dx x(1-x) \log \frac{m_f^2 + x(1-x)Q^2}{m_f^2 + x(1-x)\mu^2} \simeq O\left(\frac{\mu^2}{m_f^2}, \frac{Q^2}{m_f^2}\right).$$

§ 29. Массовые члены и свойства инвариантности; киральная инвариантность

В § 28 мы видели, что при энергиях $Q \gg \Lambda$, когда теория возмущений по бегущей константе связи может иметь смысл, можно пренебречь существова-

нием кварков с массами $m \gg Q$. В этом параграфе мы рассмотрим противоположный случай, когда массы кварков удовлетворяют условию $m \ll \Lambda$. Поскольку единственным размерным параметром в квантовой хромодинамике, как мы полагаем, является параметр обрезания $\Lambda^{(1)}$, можно ожидать, что в некотором приближении допустимо пренебречь массами этих легких кварков, которые могут привести к поправкам лишь порядка m^2/Λ^2 или m^2/Q^2 .

Вернемся к вопросам, обсуждавшимся в § 10. Рассмотрим лагранжиан КХД

$$\mathcal{L} = - \sum_{i=1}^n m_i \bar{q}_i q_i + i \sum_{i=1}^n \bar{q}_i \not{D} q_i - \frac{1}{4} (D \times B)^2 + \text{члены, фиксирующие калибровку,} \\ + \text{дуги.} \quad (29.1)$$

Суммирование проводится только по *легким* кваркам, массы которых удовлетворяют неравенству $m^2 \ll \Lambda^2$. Возможное существование тяжелых кварков никак не сказывается на дальнейших рассуждениях. Рассмотрим совокупность преобразований \mathbb{W}^\pm в группе $U_L(n) \times U_R(n)$ (произведение левых и правых преобразований)

$$\frac{1 \pm \gamma_5}{2} q_l \rightarrow \sum_{l'} W_{ll'}^\pm \frac{1 \pm \gamma_5}{2} q_{l'}, \quad (29.2)$$

где \mathbb{W}^\pm — унитарные матрицы. Очевидно, что единственным членом лагранжиана, инвариантным относительно преобразований (29.2), является массовый член

$$\mathcal{M} = \sum_{i=1}^n m_i \bar{q}_i q_i. \quad (29.3)$$

Записанный в таком виде, массовый член инвариантен относительно совокупности преобразований $[U(1)]^n$:

$$q_l \rightarrow e^{i\theta_l} q_l, \quad (29.4)$$

но он не инвариантен, если допустить существование в массовой матрице недиагональных членов. Чтобы решить вопрос о том, какими общими инвариантными свойствами обладает массовый член общего вида, докажем две теоремы.

¹⁾ Неясно, конечно, какой из параметров: Λ или параметр Λ_0 , определяемый формулой $\alpha_s(\Lambda_0^2) \approx 1$, является основным. Смысл неравенства $m \ll \Lambda$ также неоднозначен. Очевидно, что $\Lambda \approx \Lambda_0$, поэтому в действительности, помимо эвристических соображений, нет никаких указаний, которые помогли бы решить, какие кварки считать легкими в промежуточных случаях. Почти нет сомнений в том, что кварки u и d следует отнести к типу "легких"; в отношении кварка s ситуация менее ясна.

Теорема 1. Любую массовую матрицу общего вида можно записать в виде (29.3), проведя подходящее переопределение кварковых полей. Кроме того, можно допустить, что $m \geq 0$. Поэтому выражение (29.3) фактически является массовым членом самого общего вида.

Доказательство. Пусть левые и правые кварковые поля определяются формулами

$$q_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)q, \quad q_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)q.$$

Наиболее общий массовый член, совместимый с условием эрмитовости лагранжиана, имеет вид

$$\mathcal{M}' = \sum_{ll'} \{ \bar{q}_{lL} M_{ll'} q_{l'R} + \bar{q}_{l'R} M_{ll'}^* q_{lL} \}. \quad (29.5)$$

Пусть матрица M имеет компоненты $M_{ll'}$. На основании хорошо известного полярного разбиения матриц можно написать

$$M = mU,$$

где матрица m положительно определена, поэтому все ее собственные значения больше нуля, а матрица U унитарна. Тогда выражение (29.5) принимает вид

$$\mathcal{M}' = \sum \{ \bar{q}_{lL} m_{ll'} q_{l'R} + \bar{q}_{l'R} m_{ll'} q_{lL} \}, \quad q_{l'R} = \sum_{l'} U_{ll'} q_{l'} R, \quad (29.6)$$

где использовано свойство самосопряженности матрицы m . Переопределим поля по формуле $q' = q_R + q_L$; тогда выражение (29.6) в терминах полей q' примет вид

$$\mathcal{M}' = \sum \bar{q}'_l m_{ll'} q'_{l'},$$

где использовано равенство $\bar{q}_R q_R = \bar{q}_L q_L = 0$. Теперь для того, чтобы получить формулу (29.3), достаточно преобразовать поля q' , используя для этого матрицу V , диагонализующую матрицу m . Положительность значений величин m_l следует из того, что они являются собственными значениями матрицы m . (Отметим, что член $\bar{q}q$ в лагранжиане инвариантен относительно преобразований такого вида.)

Теорема 2. Если все массы m_l имеют различные ненулевые значения, то единственными преобразованиями, оставляющими массовый член инвариантным, являются преобразования $[U(1)]^n$ вида (29.4).

Предположим, что $W_+ = W_- = W$; проверку этого равенства оставляем читателю в качестве упражнения. Условие инвариантности массовой матрицы

приводит к соотношению

$$\mathbf{W}^+ \mathbf{m} \mathbf{W} = \mathbf{m}, \quad \text{т.е.} \quad \mathbf{m} \mathbf{W} = \mathbf{W} \mathbf{m}. \quad (29.7)$$

Известно, что любую диагональную матрицу можно записать в виде $\sum_{k=0}^{n-1} c_k \mathbf{m}^k$, если все собственные значения матрицы \mathbf{m} различны и не равны нулю, как это имеет место в нашем случае. Из соотношения (29.7) следует, что матрица \mathbf{W} коммутирует со всеми диагональными матрицами, а следовательно, она сама должна быть тоже диагональной. Поскольку эта матрица является еще и унитарной, она может быть записана в виде произведения преобразований (29.4), что и требовалось доказать. Проверку того, что сохраняющейся величиной, соответствующей преобразованию $U(1)$, действующему на поле кварка q_f , является соответствующее квантовое число аромата, оставляем читателю в качестве упражнения.

При доказательстве приведенных теорем мы не беспокоились о том, являются ли массы m голыми, бегущими или инвариантными. Это обусловлено тем, что в перенормировочной схеме \overline{MS} массовая матрица перенормируется как одно целое по формуле

$$\mathbf{M} = Z_m^{-1} \mathbf{M}_u,$$

где коэффициент Z_m — число. Доказательство очень простое. Фактически для этого нужно только повторить рассуждения § 7 — 9 и 14, учитывая матричный характер величин \mathbf{M} и Z_m . В произвольной ковариантной калибровке для расходящейся части кваркового пропагатора получим

$$\begin{aligned} S_k^{\xi}(p) = & \frac{i}{p - \mathbf{M}} \\ & + \frac{i}{p - \mathbf{M}} \left\{ - [\Delta_F(p - \mathbf{M}) + (p - \mathbf{M})\Delta_F^+] - \delta \mathbf{M} \right. \\ & \left. - (1 - \xi)(p - \mathbf{M})N_\epsilon C_F \frac{g^2}{16\pi^2} + 3N_\epsilon C_F \mathbf{M} \frac{g^2}{16\pi^2} \right\} \frac{i}{p - \mathbf{M}}, \end{aligned}$$

где введены обозначения

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_u + \delta \mathbf{M}, \quad \mathbf{Z}_F = 1 + \Delta_F.$$

Условия перенормировки приводят тогда к соотношениям

$$\Delta_F^+ + \Delta_F = -(1 - \xi)N_\epsilon C_F \frac{g^2}{16\pi^2} \text{ диагональна,}$$

$$\Delta_F \mathbf{M} = \mathbf{M} \Delta_F, \quad \mathbf{M} \delta \mathbf{M} = (\delta \mathbf{M}) \mathbf{M},$$

$$\delta \mathbf{M} = 3N_\epsilon C_F \frac{g^2}{16\pi^2} \mathbf{M}.$$

Таким образом, совокупность фермионных полей и массовая матрица преобразуются как одно целое, а перенормировочные множители имеют вид

$$Z_F^{-1} = 1 + N_c C_F \frac{g^2}{16\pi^2}, \quad Z_m = 1 - 3N_c C_F \frac{g^2}{16\pi^2}, \quad (29.8a)$$

т. е.

$$Z_F = Z_F \cdot 1, \quad Z_m = Z_m \cdot 1. \quad (29.8b)$$

Этот результат доказан в низшем порядке теории возмущений, но уравнения ренормгруппы обеспечивают его справедливость и в ведущем порядке по константе связи α_s .

Этот результат можно объяснить и другим способом. Инвариантность лагранжиана относительно преобразований (29.4) подразумевает, что контрчлены всегда можно выбрать так, чтобы они обладали инвариантностью относительно этих преобразований; поэтому массовая матрица после перенормировки по-прежнему останется диагональной. Фактически это доказательство свидетельствует о том, что в не зависящей от масс перенормировочной схеме (подобной схеме \overline{MS}) уравнения (29.8б) в действительности справедливы во всех порядках теории возмущений.

Полученные нами результаты показывают, что, если все массы \hat{m}_i различны и не равны нулю¹⁾, единственная глобальная симметрия, которой обладает лагранжиан, связана с сохранением такого квантового числа, как аромат, и описывается преобразованиями (29.4). Однако, как утверждалось выше, пренебрежение массами кварков m_i может представлять собой достаточно хорошую аппроксимацию. В таком случае все преобразования, представленные соотношениями (29.2), оказываются преобразованиями симметрии лагранжиана. Степень нарушения симметрии определяется, например, дивергенциями соответствующих генераторов. Хотя этот вопрос уже рассмотрен в § 10, мы приведем некоторые дополнительные подробности.

Параметрируем преобразование W в виде $\exp\{(i/2) \Sigma \theta_a \lambda^a\}$, где λ — матрицы Гелл-Манна²⁾. Операторы, выполняющие преобразования (29.2), обозначим $U_{\pm}(\theta)$:

$$U_{\pm}(\theta) \frac{1 \pm \gamma_5}{2} q_l U_{\pm}^{-1}(\theta) = \sum_r (e^{(i/2) \Sigma \theta_a \lambda^a})_{lr} \frac{1 \pm \gamma_5}{2} q_r. \quad (29.9)$$

¹⁾ По-видимому, это действительно так. Как мы увидим ниже (см. § 31), ожидается, что массы кварков удовлетворяют соотношениям $\hat{m}_d/\hat{m}_u \approx 2$, $\hat{m}_s/\hat{m}_d \approx 20$, $\hat{m}_u \approx 6$ МэВ.

²⁾ Мы рассматриваем случай трех ароматов $n_f = 3$. В случае двух ароматов $n_f = 2$ матрицы Гелл-Манна λ следует заменить матрицами Паули σ .

Для бесконечно малых значений параметра θ запишем эти операторы в виде

$$U_{\pm}(\theta) \approx 1 - \frac{i}{2} \sum L_{\pm}^a \theta_a, \quad (L_{\pm}^a)^+ = L_{\pm}^a,$$

так что из (29.9) следуют уравнения

$$[L_{\pm}^a, q_{l\pm}(x)] = - \sum_{l'} \lambda_{ll'}^a q_{l'\pm}(x), \quad q_{l\pm} \equiv \frac{1 \pm \gamma_5}{2} q_l. \quad (29.10)$$

Поскольку операторы U оставляют инвариантным член лагранжиана, описывающий взаимодействие, уравнения (29.10) можно решить для случая свободных полей. Результат имеет вид¹⁾

$$L_{\pm}^a(t) =: \int d\vec{x} \sum_{l'} \bar{q}_{l\pm}(x) \gamma^0 \lambda_{ll'}^a q_{l'\pm}(x):, \quad t = x^0. \quad (29.11)$$

В этих операторах можно узнать заряды, соответствующие токам

$$J_{\pm}^{a\mu}(x) =: \sum_{l'} \bar{q}_l(x) \lambda_{ll'}^a \gamma^{\mu} \frac{1 \pm \gamma_5}{2} q_{l'}(x):. \quad (29.12)$$

Если рассматриваемая симметрия точная, то $\partial_{\mu} J_{\pm}^{a\mu} = 0$; тогда легко видеть, что величины $L_{\pm}^a(t)$ в действительности не зависят от времени. Иначе, нужно определить *одновременные* преобразования и модифицировать уравнения (29.9) и (29.10), например, так:

$$[L_{\pm}^a(t), q_{l\pm}(x)] = - \sum_{l'} \lambda_{ll'}^a q_{l'\pm}(x), \quad t = x^0. \quad (29.13)$$

Совокупность преобразований

$$U_{\pm}(\theta, t) = \exp \left\{ \frac{-i}{2} \sum L_{\pm}^a(t) \theta_a \right\}$$

образует так называемую группу *киральных преобразований*, генерируемых токами (29.12). В рассматриваемом случае кварков трех ароматов $n = 3$, мы приходим к группе киральных преобразований $SU_F^+(3) \times SU_F^-(3)$. Ее генераторы можно выразить, исходя из набора векторных и аксиальных токов²⁾ $V_{ll}^{\mu}(x)$ и $A_{ll}^{\mu}(x)$, введенных в § 10. Важной подгруппой группы $SU_F^+(3) \times SU_F^-(3)$ является генерируемая векторным током подгруппа, представляющая собой просто группу аромата $SU_F(3)$, введенную Гелл-Манном и Нееманом.

¹⁾ Для проверки решения (29.11) можно воспользоваться коммутационными соотношениями для свободных полей (приложение E); это оправдано тем, что на малых расстояниях КХД переходит в свободную квантовую теорию.

²⁾ Не все диагональные элементы принадлежат группе $SU_F(3) \times SU_F(3)$, но они принадлежат группе $U_F(3) \times U_F(3)$.

Точность соблюдения симметрии связана с независимостью от времени зарядов L_{\pm} , которые в свою очередь связаны с дивергенциями токов. Кроме диагональных аксиальных токов, эти дивергенции пропорциональны разностям кварковых масс $m_l - m_l$ для векторных токов и суммам кварковых масс $m_l + m_l$ для аксиальных токов (см. (10.5)). Таким образом, можно заключить, что группа симметрии $SU_F(3)$ достаточно точна до тех пор, пока выполнено неравенство $|m_l - m_l|^2 \ll \Lambda^2$, а группа киральной симметрии $SU_F^+(3) \times SU_F^-(3)$ до тех пор, пока выполнено условие $m_l^2 \ll \Lambda^2$. По-видимому, разность масс имеет тот же порядок величины, что и сами массы, поэтому ожидается, что киральная симметрия выполняется почти с той же степенью точности, что и симметрия по ароматам. Кажется, это действительно так¹⁾.

§ 30. Симметрии Вигнера – Вейля и Намбу – Голдстоуна

Из того, что киральная симметрия $SU(3)$ и симметрия по ароматам кварков $SU_F(3)$ обладают одинаковой степенью точности, не следует, что эти симметрии реализуются одинаково. В действительности, как будет показано, существуют веские теоретические и экспериментальные причины, обуславливающие значительную разницу между ними.

Начнем с введения зарядов, обладающих определенной четностью:

$$Q^a = L_+^a + L_-^a, \quad Q_5^a = L_+^a - L_-^a. \quad (30.1)$$

Одновременные коммутационные соотношения для них имеют вид

$$\begin{aligned} [Q^a(t), Q^b(t)] &= 2i \sum f^{abc} Q^c(t), \\ [Q^a(t), Q_5^b(t)] &= 2i \sum f^{abc} Q_5^c(t), \\ [Q_5^a(t), Q_5^b(t)] &= 2i \sum f^{abc} Q^c(t). \end{aligned} \quad (30.2)$$

Набор операторов Q^a образует группу $SU_F(3)$. В пределе $m_l \rightarrow 0$ все генераторы Q и Q_5 не зависят от времени t и коммутируют с лагранжианом:

$$[Q^a, \mathcal{L}] = [Q_5^a, \mathcal{L}] = 0. \quad (30.3)$$

Однако различие между ними состоит в том, как эти операторы действуют на вакуумное состояние. В общем случае, если имеется совокупность генерато-

¹⁾ Киральная симметрия и киральная динамика представляют собой предмет специального изучения. Здесь мы касаемся только тех их аспектов, которые имеют отношение к КХД. При этом многие важные применения опускаются. Заинтересованный читатель может обратиться к работам [213, 228] и цитируемой там литературе.

ров L^j преобразований симметрии лагранжиана, мы имеем два возможных результата их действия на вакуумное состояние:

$$L^j|0\rangle = 0 \quad (30.4)$$

и

$$L^j|0\rangle \neq 0. \quad (30.5)$$

Первый случай соответствует реализации симметрии *Вигнера – Вейля*, а второй – реализации симметрии *Намбу – Голдстоуна*. Конечно, в общем случае оба эти типа реализации симметрии могут присутствовать одновременно; часть генераторов L^i , $i = 1, \dots, r$, удовлетворяет равенству (30.4), а остальные генераторы L^k , $k = r + 1, \dots, n$, удовлетворяют равенству (30.5). Очевидно, что если операторы L^1 и L^2 удовлетворяют равенству (30.4), то этому же равенству удовлетворяет и их коммутатор. Следовательно, совокупность преобразований симметрий Вигнера – Вейля представляет собой подгруппу.

При рассмотрении данного круга вопросов важны две теоремы. Первая из них, установленная Коулменом [72], гласит, что "инвариантность вакуума означает инвариантность мира", или, более строго, что физические состояния (включая и связанные состояния) инвариантны по отношению к преобразованиям из группы симметрии Вигнера – Вейля. Если предположить, что киральная симметрия принадлежит к симметриям Вигнера – Вейля, то отсюда можно заключить, что массы мезонов должны быть вырождены с точностью до поправок порядка m^2/m_h , где m_h – адронные массы. Это справедливо для таких мезонов, как ω , ρ , K^* , ϕ или f^* , A_2 , f^0 ; но если рассмотреть дублеты по четности, то вырождения, очевидно, нет. Это обстоятельство убедительно свидетельствует о том, что группа симметрии $SU_F(3)$ принадлежит к симметрии Вигнера – Вейля, а киральная группа симметрии $SU_F^+(3) \times SU_F^-(3)$ содержит генераторы типа Намбу – Голдстоуна. Поэтому мы примем, что генераторы Q и Q_s удовлетворяют соотношениям

$$Q^a(t)|0\rangle = 0, \quad Q_s^a(t)|0\rangle \neq 0. \quad (30.6)$$

Второй важной теоремой является теорема Голдстоуна [148]. Она утверждает, что для каждого генератора, результат действия которого на вакуумное состояние не равен нулю, должен существовать безмассовый бозон, обладающий теми же квантовыми числами, что и соответствующий ему генератор. Таким образом, малость масс мезонов π и K^1 мы "объясняем" тем, что в пре-

¹⁾ При рассмотрении частиц, имеющих равное нулю квантовое число аромата, возникнет своя проблема (так называемая $U(1)$ -проблема). Мы обсудим ее несколько ниже.

деле $m_u, m_d, m_s \rightarrow 0$ мы получили бы $m_\pi \rightarrow 0$ и $m_K \rightarrow 0$. Действительно, несколько ниже будет показано, что ¹⁾

$$m_\pi^2 \approx m_u + m_d, \quad m_K^2 \approx m_s + m_{u,d}. \quad (30.7)$$

Мы не будем доказывать здесь этих теорем, а отметим, что соотношения (30.7) дают более количественный критерий выполнения киральной симметрии и симметрии по ароматам; они справедливы с точностью до поправок порядка m_π^2/m_ρ^2 для группы $SU_F(2)$ и с точностью до поправок порядка $m_K^2/m_{K^*}^2$ в случае группы $SU_F(3)$.

Отметим также, что симметрия Намбу – Голдстоуна [203, 205, 206] не может быть реализована в рамках теории возмущений, так как во всех порядках теории возмущений $Q_5^a(t)|0\rangle = 0$. Это означает, что физический вакуум отличается от вакуума теории возмущений в пределе $m \rightarrow 0$. Там, где есть опасность ошибиться, мы будем подчеркивать этот факт, используя для вакуума теории возмущений обозначение $|0\rangle$, а для физического вакуума обозначение $|\text{vac}\rangle$. Поэтому соотношения (30.6) мы запишем в виде

$$Q^a(t)|\text{vac}\rangle = 0, \quad Q_5^a(t)|\text{vac}\rangle \neq 0. \quad (30.8)$$

Нетрудно видеть, как это происходит. Пусть $a_{m_G}^+(\vec{p})$ — оператор рождения частицы, масса которой может быть равной нулю. Состояния

$$a_{m_G}^+(\vec{0})^{(n)} \dots a_{m_G}^+(\vec{0})|0\rangle = |n\rangle$$

вырождены в пределе $m_G \rightarrow 0$. Таким образом, в этом пределе физический вакуум имеет вид

$$|\text{vac}\rangle = \sum C_n |n\rangle.$$

Ожидается, что подобное явление происходит в квантовой хромодинамике, в частности в пределе $m_q \rightarrow 0$.

§ 31. Частичное сохранение аксиального тока и отношения масс кварков

Теперь мы можем получить количественные результаты для масс легких кварков. С этой целью рассмотрим ток

$$A_{ud}^\mu(x) = \bar{u}(x)\gamma^\mu\gamma_5 d(x),$$

¹⁾ Правые части соотношений (30.7) должны быть умножены на константу размерности массы. — Прим. перев.

и его дивергенцию

$$\partial_\mu A_{ud}^\mu(x) = i(m_u + m_d)\bar{u}(x)\gamma_5 d(x).$$

Последняя величина имеет квантовые числа π^+ -мезона, и ее можно использовать как (составное) пионное поле. Поэтому напомним

$$\partial_\mu A_{ud}^\mu(x) = \sqrt{2} f_\pi m_\pi^2 \phi_\pi(x). \quad (31.1)$$

Коэффициенты в формуле (31.1) выбраны такими по историческим причинам. Пионное поле $\phi_\pi(x)$ нормировано следующим образом:

$$\langle 0 | \phi_\pi(x) | \pi(p) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-ipx}, \quad (31.2a)$$

где $|\pi(p)\rangle$ — однопионное состояние с импульсом p . Константа f_π может быть получена экспериментально. Действительно, рассмотрим слабый распад $\pi \rightarrow \mu\nu$. Эффективный лагранжиан Ферми, описывающий слабые взаимодействия, имеет вид

$$\mathcal{L}_{\text{int}}^F = (G_F/\sqrt{2}) \bar{\mu}\gamma_\lambda(1 - \gamma_5)\nu_\mu \bar{u}\gamma^\lambda(1 - \gamma_5)d + \dots$$

Используя его, мы получаем

$$F(\pi \rightarrow \mu\nu) = \frac{2\pi G_F}{\sqrt{2}} \bar{u}_{(\nu)}(p_2)\gamma_\lambda(1 - \gamma_5)v_{(\mu)}(p_1, \sigma) \langle 0 | A_{ud}^\lambda(0) | \pi(p) \rangle.$$

Исходя из соображений инвариантности, можно написать равенство

$$\langle 0 | A_{ud}^\lambda(0) | \pi(p) \rangle = ip^\lambda C_\pi, \quad (31.2b)$$

свернув которое с компонентой импульса p_μ , получим результат $C_\pi = f_\pi \sqrt{2}/(2\pi)^{3/2}$:

$$m_\pi^2 C_\pi = \langle 0 | \partial_\lambda A_{ud}^\lambda(0) | \pi(p) \rangle = \sqrt{2} f_\pi m_\pi^2 \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}; \quad (31.2в)$$

следовательно,

$$\Gamma(\pi \rightarrow \mu\nu) = \frac{4\pi}{(1 - m_\mu^2/m_\pi^2)^2 G_F^2 f_\pi^2 m_\pi m_\mu^2}.$$

Таким образом, константа f_π непосредственно связана со скоростью распада $\pi \rightarrow \mu\nu$. Экспериментально получено значение $f_\pi \approx 93,3$ МэВ. Замечательный факт состоит в том, что, повторив тот же анализ для каонов и используя равенство

$$\partial_\mu A_{us}^\mu(x) = \sqrt{2} f_K m_K^2 \phi_K(x), \quad (31.3)$$

мы получим экспериментальное значение $f_K \approx 110$ МэВ, которое с точностью 20% согласуется со значением величины f_{π^0} . В действительности этого и следовало ожидать, так как в пределе $m_u, d, s \rightarrow 0$ разницы между пионами и каонами нет и должно выполняться строгое равенство. Тот факт, что значения f_{π} и f_K в реальном мире оказываются такими близкими, является веским аргументом в пользу киральной симметрии $SU_F(3)$.

Соотношения (31.1) и (31.3) иногда называют частичным сохранением аксиального тока (ЧСАТ)¹⁾, что не имеет большого смысла, так как эти соотношения на самом деле являются *тождествами*. Можно использовать любое желаемое пионное поле, в частности поле (31.1) при условии, что оно имеет правильные квантовые числа и его матричный элемент между вакуумным и однопионным состояниями не равен нулю. Нетривиальная часть явления частичного сохранения аксиального тока описана ниже.

Следующий шаг состоит в рассмотрении двухточечных функций (индекс ud в обозначении A_{ud} мы опускаем)

$$F^{\mu\nu}(q) = i \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle T A^\mu(x) A^\nu(0)^+ \rangle_{\text{vac}},$$

и их свертки с компонентами импульса q_μ и q_ν

$$\begin{aligned} q_\nu q_\mu F^{\mu\nu}(q) &= -q_\nu \int d^4x e^{iq \cdot x} \partial_\mu \langle T A^\mu(x) A^\nu(0)^+ \rangle_{\text{vac}}, \\ &= -q_\nu \int d^4x e^{iq \cdot x} \delta(x^0) \langle [A^0(x), A^\nu(0)^+] \rangle_{\text{vac}} \quad c \\ &\quad - q_\nu \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle T \partial A(x) A^\nu(0)^+ \rangle_{\text{vac}}, \\ &= 2i \int d^4x e^{iq \cdot x} \delta(x^0) \langle [A^0(x) \partial A(0)^+] \rangle_{\text{vac}} \\ &\quad + i \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle T \partial A(x) \partial A(0)^+ \rangle_{\text{vac}}. \end{aligned}$$

Используя равенство (31.1) и вычислив коммутатор, получаем

$$\begin{aligned} q_\mu q_\nu F^{\mu\nu}(q) &= 2(m_u + m_d) \int d^4x e^{iq \cdot x} \delta(x) \langle \bar{u}(x) u(x) + \bar{d}(x) d(x) \rangle_{\text{vac}} \\ &\quad + 2if_\pi^2 m_\pi^4 \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle T \phi_\pi(x) \phi_\pi(0)^+ \rangle_{\text{vac}}, \end{aligned}$$

или в пределе $q \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} &2(m_u + m_d) \langle \bar{u}(0) u(0) + \bar{d}(0) d(0) \rangle_{\text{vac}} \\ &= -2if_\pi^2 m_\pi^4 \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle T \phi_\pi(x) \phi_\pi(0)^+ \rangle_{\text{vac}} |_{q \rightarrow 0}. \end{aligned}$$

¹⁾ Действительно, в пределе $m_\pi^2 \rightarrow 0$ правая часть равенства (31.1) обращается в нуль.

В правую часть этого равенства дают вклады пионный полюс и континуум, которые можно записать в виде

$$i \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle T \phi_\pi(x) \phi_\pi(0)^+ \rangle_{\text{vac}} |_{q \rightarrow 0} = \left\{ \frac{1}{m_\pi^2 - q^2} + \frac{1}{\pi} \int dt' \frac{\text{Im } \Pi}{t' - q^2} \right\}_{q \rightarrow 0} \\ = \frac{1}{m_\pi^2} + \frac{1}{\pi} \int dt' \frac{\text{Im } \Pi}{t'} ;$$

$$\Pi = i \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle T \phi_\pi(x) \phi_\pi(0)^+ \rangle_{\text{vac}} .$$

Порядок выполнения предельных переходов в данном случае существен; сначала следует устремить импульс q к нулю, а затем перейти к киральному пределу. В этом пределе¹⁾ $m_\pi^2 \rightarrow 0$ первый член в правой части записанного равенства расходится, а второй остается конечным. Следовательно, мы получаем окончательный результат

$$(m_u + m_d) \langle \bar{u}u + \bar{d}d \rangle_{\text{vac}} = -f_\pi^2 m_\pi^2 \{ 1 + O(m_\pi^2) \} . \quad (31.4)$$

Это соотношение отражает тот факт, что вакуумное среднее $\langle \bar{q}q \rangle_{\text{vac}}$ не равно нулю, ибо в противном случае мы должны потребовать равенства $\int \pi = 0$. Отметим также, что до сих пор не проводилось различий между "голыми" и перенормированными массами и операторами. Этого и не нужно делать, так как известно, что масса m и составной оператор $\bar{q}q$ обладают противоположным перенормировочным поведением, и справедливо равенство $m_R(\bar{q}q)_R = m_u(\bar{q}q)_u$.

Можно повторить вывод формулы (34.1) для каонов. Пренебрегая членами $O(m_\pi^2)$ или $O(m_K^2)$, получим

$$(m_u + m_s) \langle \bar{u}u + \bar{s}s \rangle_{\text{vac}} = -f_K^2 m_{K^+}^2 , \quad (31.5) \\ (m_d + m_s) \langle \bar{d}d + \bar{s}s \rangle_{\text{vac}} = -f_K^2 m_{K^0}^2 .$$

Если предположить, что вакуумное среднее $\langle \bar{q}q \rangle$ одинаково для кварков всех ароматов, то для масс легких кварков можно получить

$$\frac{m_s + m_u}{m_d + m_u} \approx \frac{f_K^2 m_{K^+}^2}{f_\pi^2 m_\pi^2} , \quad \frac{m_d - m_u}{m_d + m_u} \approx \frac{f_K^2}{f_\pi^2} \cdot \frac{m_{K^0}^2 - m_{K^+}^2}{m_\pi^2} .$$

Более строгие оценки требуют рассмотрения обусловленных электромагнитным взаимодействием вкладов в наблюдаемые массы π - и K -мезонов. Учитывая их,

¹⁾ Это собственно и есть предел ЧСАТ, так как в этом пределе аксиальный ток сохраняется и его дивергенция равна нулю: $\partial_\mu A^\mu = 0$.

получаем¹⁾

$$\frac{m_s}{m_d} = 18 \pm 4, \quad \frac{m_d}{m_u} = 2.0 \pm 0.3 \quad (31.6)$$

Если теперь объединить эти результаты с феноменологическими оценками (из спектроскопии мезонов и барионов) масс кварков $m_s - m_d \approx 100 - 200$ МэВ, $m_d - m_u \approx 4$ МэВ, то мы получим следующие значения масс в мегаэлектрон-вольтах:

$$\bar{m}_u(q \sim m_p) \approx 6, \quad \bar{m}_d(Q \sim m_p) \approx 10, \quad \bar{m}_s(Q \sim m_p) \approx 200, \quad (31.7)$$

где приближенное равенство означает, что возможна ошибка в 2 раза.

Такой способ получения масс кварков весьма неточен, поэтому в следующем параграфе будет описан другой, более изощренный метод.

§ 32. Ограничения на массы легких кварков и оценки для них

В этом параграфе описан метод получения ограничений на массы кварков и оценок для них. Этот метод впервые был использован в работе [254] и развит в работе [34]. Отправной точкой метода является функция

$$\Psi_{ij}^5(q^2) = i(m_i + m_j)^2 \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle T J_{ij}^5(x) J_{ij}^5(0)^+ \rangle_{\text{vac}}, \quad (32.1)$$

где ток J^5 имеет вид

$$J_{ij}^5 = \bar{q}_i \gamma_5 q_j.$$

Во всех порядках теорий возмущений функция

$$F_{ij}(Q^2) = \frac{\partial^2}{\partial (q^2)^2} \Psi_{ij}^5(q^2), \quad Q^2 = -q^2,$$

в пределе $Q^2 \rightarrow \infty$ обращается в нуль. Следовательно, можно записать без каких-либо вычитаний следующее дисперсионное соотношение:

$$F_{ij}(Q^2) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dt \frac{\text{Im } \Psi_{ij}^5(t)}{(t + Q^2)^3}. \quad (32.2)$$

Легкую часть этого равенства при больших значениях Q^2 можно вычислить в рамках квантовой хромодинамики. Но при этом необходимо соблюдать осторожность:

¹⁾ См. работы [99, 260, 280]. Этот метод возник в работах [141, 147, 192].

недостаточно сохранить только ведущий член операторного разложения для произведения токов $TJ^5 J^{5+}$, вклад операторов $\bar{q}q$, $x^\alpha \bar{q} \partial_\alpha q$ и $G^2 = \sum_a G_{a\mu\nu} G_a^{\mu\nu}$ также оказывается важным. Проводя вычисления в двухпетлевом приближении и помня о том, что операторы $\alpha_s G^2$ и $m\bar{q}q$ в рассматриваемом порядке теории возмущений являются ренорминвариантными величинами, получаем

$$F_{ij}(Q^2) = \frac{3}{8\pi^2} \cdot \frac{[\bar{m}_i(Q^2) + \bar{m}_j(Q^2)]^2}{Q^2} \times \left\{ 1 + O\left(\frac{\bar{m}^2}{Q^2}\right) + \frac{11}{3} \cdot \frac{\alpha_s(Q^2)}{\pi} + \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{\alpha_s \langle G^2 \rangle}{Q^4} - \frac{16\pi^2}{3Q^4} \left[\left(m_j - \frac{m_i}{2}\right) \langle \bar{q}_i q_i \rangle + \left(m_i - \frac{m_j}{2}\right) \langle \bar{q}_j q_j \rangle \right] \right\}.$$

Вклады операторов $\langle \bar{q}q \rangle$ и $\langle G^2 \rangle$ оцениваются с учетом непертурбативных частей кваркового и глюонного пропагаторов (см. § 35, 36, где подробно рассмотрен пример вычислений). Вклады оператора $m\langle \bar{q}q \rangle$ можно оценить, используя формулы (31.4) и (31.5); по-видимому, эти вклады имеют величину $O(\bar{m}^2/Q^2)$ и оказываются пренебрежимо малыми. Таким образом, получаем

$$F_{ij}(Q^2) = \frac{3}{8\pi^2} \cdot \frac{[\bar{m}_i(Q^2) + \bar{m}_j(Q^2)]^2}{Q^2} \times \left\{ 1 + \frac{11}{3} \cdot \frac{\alpha_s(Q^2)}{\pi} + \frac{2\pi}{3Q^4} \alpha_s \langle G^2 \rangle \right\}. \quad (32.3)$$

Обратимся теперь к правой части равенства (32.2). Вклад пионного (для $ij = ud$) или каонного (для $ij = us, sd$) резонанса можно получить непосредственно; в случае пионов находим

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty dt \frac{\text{Im} \Psi^5(t)}{(t + Q^2)^3} = 4f_\pi^2 m_\pi^4 \frac{1}{(m_\pi^2 + Q^2)^3} + \frac{2}{\pi} \int_{m_\pi^2}^\infty dt \frac{\text{Im} \Psi^5(t)}{(t + Q^2)^3}. \quad (32.4)$$

Здесь важно, что $\text{Im} \Psi^5(t) \geq 0$; отсюда немедленно следует неравенство, связывающее величины $m_u + m_d$ и $m_{\pi^2}, f_\pi, \alpha_s \langle G^2 \rangle$:

$$[\bar{m}_u(Q^2) + \bar{m}_d(Q^2)]^2 \geq \frac{32\pi^2 f_\pi^2 m_\pi^4}{3(m_\pi^2 + Q^2)^3} \times \left\{ 1 + \frac{11}{3} \cdot \frac{\alpha_s(Q^2)}{\pi} + \frac{2\pi}{3Q^4} \alpha_s \langle G^2 \rangle \right\}^{-1}. \quad (32.5)$$

Это ограничение не слишком хорошее, так как мы теряем значительную часть информации. Его можно улучшить, рассмотрев N -ю производную от величины $F(Q^2)$ и оптимизируя ее по переменным N и Q^2 . Детальное изложение можно найти в работе [34]. В результате получаем

$$\hat{m}_u + \hat{m}_d \geq \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \cdot \frac{8m_\pi^2 f_\pi^2}{3\langle\alpha_s G^2\rangle^{1/2}} \{1 \pm \delta\}, \quad (32.6)$$

где δ — поправка $\sim 25\%$. Если использовать значение вакуумного среднего $\langle\alpha_s G^2\rangle_0$, полученное из спектроскопии чармония [229, 230] или в вычислениях на решетке [96], то получим такие численные оценки:

$$\hat{m}_u + \hat{m}_d \geq (23 \pm 8) \text{ МэВ}, \quad \langle\alpha_s G^2\rangle \approx 0.044_{-0.006}^{+0.014} \text{ ГэВ}^4. \quad (32.7)$$

Эти ограничения не учитывают возможные ошибки в определении значения вакуумного среднего $\langle\alpha_s G^2\rangle$. Если добавить и их, то получим ограничение снизу

$$\hat{m}_u + \hat{m}_d \geq 13 \text{ МэВ}. \quad (32.8)$$

Во всяком случае, это ограничение совместимо в пределах ошибок с ограничениями (31.7), хотя некоторое предпочтение отдается большим массам кварков.

Этот метод можно использовать не только для получения ограничений на массы кварков, но и для *оценки* их значений. С этой целью в рамках той или иной модели вычисляют функцию $\text{Im } \Psi_{ij}^5(t)$, для которой при больших t используют выражение, полученное из КХД, а низкоэнергетическую часть параметризуют (одним или несколькими) резонансами. Таким способом получена оценка [169, 254, 284*]

$$\hat{m}_u + \hat{m}_d \approx (20 \pm 6) \text{ МэВ}. \quad (32.9)$$

Недавно был развит альтернативный метод [210], который можно рассматривать как основанное на КХД улучшение классических оценок, полученных в работе [192]. Этот метод позволил получить приближенное значение $\hat{m}_u + \hat{m}_d \approx 27 \pm 8$ МэВ при параметре обрезания $\Lambda = 130 \pm 50$ МэВ. Как было указано выше, мы получаем массы кварков, согласующиеся с оценками (31.7), но смещенные в сторону больших значений. Между прочим, эти оценки показывают, что ограничение (32.6) является очень строгим, и, возможно, приближенное равенство

$$\hat{m}_u + \hat{m}_d \approx \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \cdot \frac{8m_\pi^2 f_\pi^2}{3\langle\alpha_s G^2\rangle^{1/2}},$$

по крайней мере в некотором пределе, является точным.

§ 33. Распад $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$; аксиальная аномалия

Одно из первых указаний на существование цветовых степеней свободы было получено при изучении распада $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$, к детальному рассмотрению которого мы теперь переходим.

Используя редукционные формулы, амплитуду этого распада можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \langle \gamma(k_1, \lambda_1), \gamma(k_2, \lambda_2) | S | \pi^0(q) \rangle \\ &= \frac{-ie^2}{(2\pi)^{9/2}} \epsilon_\mu^*(k_1, \lambda_1) \epsilon_\nu^*(k_2, \lambda_2) \int d^4x_1 d^4x_2 d^4z e^{i(x_1 \cdot k_1 + x_2 \cdot k_2 - z \cdot q)} \\ & \quad \times (\partial_z^2 + m_\pi^2) \langle T J_{em}^\mu(x_1) J_{em}^\nu(x_2) \phi_{\pi^0}(z) \rangle_0, \end{aligned} \quad (33.1)$$

где принято

$$\partial^2 A^\mu(x) = J_{em}^\mu(x),$$

A — поле фотонов¹⁾. Выделяя дельта-функцию $\delta(k_1 + k_2 - q)$, получаем

$$F(\pi^0 \rightarrow \gamma(k_1, \lambda_1), \gamma(k_2, \lambda_2)) = \frac{e^2(q^2 - m_\pi^2)}{\sqrt{2}\pi} \epsilon_\mu^*(k_1, \lambda_1) \epsilon_\nu^*(k_2, \lambda_2) F^{\mu\nu}(k_1, k_2), \quad (33.2a)$$

где вакуумное среднее

$$F^{\mu\nu}(k_1, k_2) = \int d^4x d^4y e^{i(x \cdot k_1 + y \cdot k_2)} \langle T J^\mu(x) J^\nu(y) \phi_{\pi^0}(0) \rangle_0, \quad q = k_1 + k_2. \quad (33.2b)$$

Всюду в дальнейшем при токе J подразумевается индекс em , обозначающий электромагнитное взаимодействие. Теперь можно использовать соотношение (31.1), обобщив его так, чтобы включить поля π^0 -мезонов:

$$\begin{aligned} \partial_\mu A_3^\mu(x) &= 2f_\pi m_\pi^2 \phi_{\pi^0}(x), \\ A_3^\mu(x) &= \bar{u}(x) \gamma^\mu \gamma_5 u(x) - \bar{d}(x) \gamma^\mu \gamma_5 d(x), \end{aligned} \quad (33.3)$$

и записать с его помощью равенства

¹⁾ Мы оставляем читателю в качестве упражнения доказательство этого равенства, а также равенства

$$\partial_{x_1}^2 \partial_{x_2}^2 T A^\mu(x_1) A^\nu(x_2) \phi(z) = T (\partial^2 A^\mu(x_1) \partial^2 A^\nu(x_2)) \phi(z),$$

означающего, что возможные члены, в которых производные действуют на функцию $\phi(x_1^0 - z^0)$ в хронологическом произведении, приводят к вкладам, равным нулю.

$$F^{\mu\nu}(k_1, k_2) = \frac{1}{\int_{\pi} m_{\pi}^2} T^{\mu\nu}(k_1, k_2), \quad (33.4)$$

$$T^{\mu\nu}(k_1, k_2) = \frac{1}{2} \int d^4x d^4y e^{i(x \cdot k_1 + y \cdot k_2)} \langle T J^{\mu}(x) J^{\nu}(0) \partial A_3(0) \rangle_0.$$

До сих пор все вычисления были точными. Следующий же шаг связан с применением гипотезы частичного сохранения аксиального тока (ЧСАТ), сформулированной в таком виде: предполагается, что в пределе $q^2 \rightarrow 0$ амплитуду $F(\pi \rightarrow \gamma\gamma)$ можно аппроксимировать ее ведущим членом. Из чисто кинематических соображений видно, что при этом также $q, k_1, k_2 \rightarrow 0$. Тогда можно написать

$$T^{\mu\nu}(k_1, k_2) = \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} k_{1\alpha} k_{2\beta} \Phi + O(k^3). \quad (33.5)$$

Гипотеза частичного сохранения аксиального тока означает, что в выражении (33.5) мы сохраняем только первый член. Ниже будет показано, что это приводит к противоречию, для разрешения которого необходимо ввести так называемую *аксиальную аномалию*, что позволит точно вычислить тензор $T^{\mu\nu}$ во всех порядках теории возмущений (в приближении ЧСАТ).

Первый шаг состоит в рассмотрении величины

$$R^{\mu\lambda}(k_1, k_2) = i \int d^4x d^4y e^{i(x \cdot k_1 + y \cdot k_2)} \langle T J^{\mu}(x) J^{\nu}(y) A_3^{\lambda}(0) \rangle_0. \quad (33.6)$$

Исходя только из требования лоренц-инвариантности, для нее можно написать общее разложение

$$R^{\mu\lambda}(k_1, k_2) = \epsilon^{\mu\lambda\alpha} k_{1\alpha} \Phi_1 + \epsilon^{\mu\lambda\alpha} k_{2\alpha} \Phi_2 + O(k^3), \quad (33.7)$$

где члены $O(k^3)$ имеют вид $\epsilon^{\mu\lambda\alpha\beta} k_{i\alpha} k_{j\beta} k_{l\lambda} \Phi_{lij}$ + три перестановки, и для случая $m \neq 0$ функция Φ является регулярной в пределе $k_i \rightarrow 0$. Сохранение электромагнитного тока $\partial J = 0$ приводит к равенствам

$$k_{1\mu} R^{\mu\lambda} = k_{2\nu} R^{\mu\nu} = 0; \quad (33.8)$$

первое из этих равенств обеспечивает выполнение соотношения

$$\Phi_2 = O(k^2), \quad (33.9a)$$

а второе — соотношения

$$\Phi_1 = O(k^2). \quad (33.9b)$$

Но из формул (33.4) и (33.6) следует равенство

$$q_{\lambda} R^{\mu\lambda}(k_1, k_2) = T^{\mu\nu}(k_1, k_2), \quad \text{т.е. } \Phi = \Phi_2 - \Phi_1, \quad (33.10)$$

и, следовательно, учитывая выражения (33.9), получаем результат [238, 255]

$$\Phi = O(k^2). \quad (33.11)$$

Импульс k имеет величину порядка m_π , откуда следует оценка $\Phi \approx m_\pi^2$. Но это противоречит эксперименту и, что еще хуже, противоречит результату прямого вычисления. Действительно, используя уравнение движения, можно написать

$$\partial_\mu A_3^\mu(x) = 2i \{ m_u \bar{u}(x) \gamma_5 u(x) - m_d \bar{d}(x) \gamma_5 d(x) \}. \quad (33.12)$$

Проведем вычисления в нулевом порядке теории возмущений по константе связи α_s ; очевидно, что в этом порядке выражение (33.11) должно быть справедливо. Этому соответствуют диаграммы рис. 25, а. Результат, полученный впервые в работе [234], в пределе $k_1, k_2 \rightarrow 0$ при $\delta_u = 1, \delta_d = -1$ имеет вид

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu}(k_1, k_2) &= 3 \times 2 \times \sum_{f=u,d} \delta_f Q_f^2 m_f \\ &\times \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \cdot \frac{\text{Tr} \gamma_5 (\not{p} + k_1 + m_f) \gamma^\mu (\not{p} + m_f) \gamma^\nu (\not{p} - k_2 + m_f)}{[(p + k_1)^2 - m_f^2] (p^2 - m_f^2) [(p - k_2)^2 - m_f^2]} \\ &= \frac{-1}{4\pi^2} \epsilon^{\mu\alpha\beta} k_{1\alpha} k_{2\beta} \{ 3(Q_u^2 - Q_d^2) \} + O(k^4) \\ &= \frac{-1}{4\pi^2} \epsilon^{\mu\alpha\beta} k_{1\alpha} k_{2\beta} + O(k^4). \end{aligned}$$

Множитель 2 в первом выражении является следствием учета "крест"-диаграмм; множитель 3 возник из суммирования по цвету. Таким образом, получаем

$$\Phi = \frac{-1}{4\pi^2}, \quad (33.13)$$

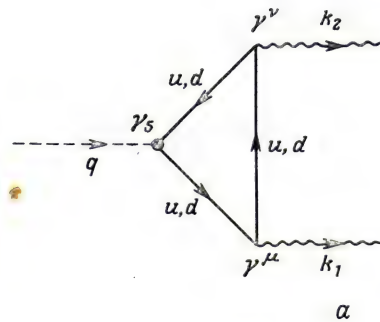
что противоречит результату (33.11). Это и составляет содержание треугольной аномалии [7, 36].

В чем скрыто противоречие? Очевидно, что нельзя сохранить выражение (33.12), которое получено с использованием уравнения движения для свободных полей $i \not{\partial} q = m q$; необходимо допустить, что в присутствии векторных полей (в данном случае фотонного поля) выражение (33.12) не справедливо. Чтобы получить согласие с формулой (33.13), необходимо написать [7]

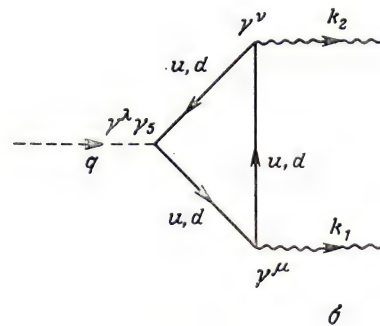
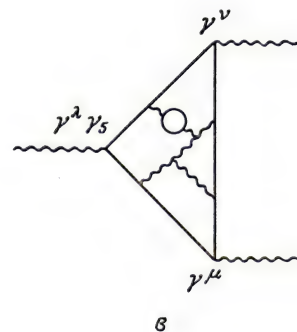
$$\begin{aligned} \partial_\mu A_3^\mu(x) &= 2i \{ m_u \bar{u}(x) \gamma_5 u(x) - m_d \bar{d}(x) \gamma_5 d(x) \} \\ &+ 3(Q_u^2 - Q_d^2) \frac{e^2}{16\pi^2} F_{\mu\nu}(x) \tilde{F}^{\mu\nu}(x), \end{aligned} \quad (33.14)$$

где дуальный тензор \tilde{F} определяется формулой

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}, \quad F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha,$$



+ „кросс“-диаграмма



+ „кросс“-диаграмма

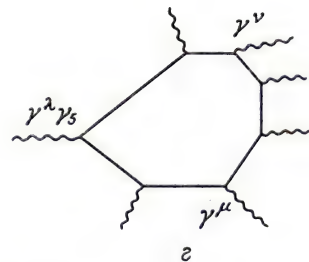


Рис. 25. Диаграммы с аномалиями (а, б) и диаграммы, не содержащие аномалий (в, г).

где A — фотонное поле. Для более общего случая фермионных полей f , взаимодействующих с векторными полями с константой взаимодействия h_f , справедливо выражение

$$\partial_\mu \bar{f} \gamma^\mu \gamma_5 f = 2im_f \bar{f} \gamma_5 f + \frac{T_F h^2}{8\pi^2} H_{\mu\nu} \tilde{H}^{\mu\nu}; \quad (33.15)$$

здесь $H^{\mu\nu}$ — тензор напряженностей векторных полей. Вернемся к рассмотрению распада $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$. Из (33.13) в пределе ЧСАТ $m_\pi \sim 0$ вычислим амплитуду распада

$$F(\pi^0 \rightarrow 2\gamma) = \frac{\alpha}{\pi} \cdot \frac{\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} k_{1\alpha} k_{2\beta} \epsilon_\mu(k_1, \lambda_1) \epsilon_\nu(k_2, \lambda_2) (q^2 - m_\pi^2)}{\sqrt{2}\pi f m_\pi^2} \quad (33.16)$$

и ширину распада

$$\Gamma(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \frac{1}{64\pi} \cdot \frac{m_\pi^3}{f_\pi^2} \approx 7,25 \cdot 10^{-6} \text{ МэВ},$$

которую следует сравнить с экспериментально полученным значением

$$\Gamma_{\text{exp}}(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma) = 7.95 \times 10^{-6} \text{ МэВ}.$$

В действительности можно определить и знак амплитуды распада (используя метод Примакова), который согласуется с теоретическими предсказаниями. Важно отметить, что если бы не было цветовых степеней свободы, то результат был бы в $(1/3)^2$ раза меньше и отличался бы от экспериментального значения на целый порядок величины.

Можно поставить вопрос о том, насколько достоверны эти вычисления. В конце концов, они выполнены в нулевом порядке теории возмущений по константе связи α_s . На самом деле этот расчет верен во всех порядках теории возмущений КХД⁵¹⁾; единственное приближение состоит в использовании гипотезы ЧСАТ $m_\pi \approx 0$. Чтобы убедиться в этом, приведем альтернативный метод получения основного результата (33.13). Для этого вернемся к выражению (36.6). В нулевом порядке теории возмущений по константе связи α_s имеем

$$R^{\mu\nu\lambda} = \sum \delta_f Q_f^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \cdot \frac{\text{Tr} \gamma^\lambda \gamma_5 (\not{p} + k_1 + m_f) \gamma^\mu (\not{p} + m_f) \gamma^\nu (\not{p} - k_2 + m_f)}{((p + k_1)^2 - m_f^2)(p^2 - m_f^2)((p - k_2)^2 - m_f^2)} \\ + \text{вклад "кросс"-диаграммы}$$

¹⁾ В действительности этот расчет верен во всех порядках теории возмущений для любого взаимодействия, подобного векторному. Доказательство этого факта в основном содержится в работе [9] (см. также [25, 80, 268]).

(рис. 25, б) В общем случае можно рассматривать произвольный аксиальный треугольник, которому соответствует выражение

$$R_{ijl}^{\mu\nu\lambda} = 2 \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \cdot \frac{\text{Tr} \gamma^\lambda \gamma_5 (\not{p} + k_1 + m_i) \gamma^\mu (\not{p} + m_j) \gamma^\nu (\not{p} - k_2 + m_l)}{[(p + k_1)^2 - m_i^2](p^2 - m_j^2)[(p - k_2)^2 - m_l^2]}. \quad (33.17)$$

Нам нужно вычислить величину $q_\lambda R^{\lambda\mu\nu}$. Используя равенство

$$(k_1 + k_2) \gamma_5 = -(\not{p} - k_2 - m_l) \gamma_5 + (\not{p} + k_1 - m_i) \gamma_5 - (m_i + m_l) \gamma_5,$$

приходим к результату

$$q_\lambda R_{ijl}^{\lambda\mu\nu} = -2(m_i + m_l) \times \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \frac{\gamma_5 (\not{p} + k_1 + m_i) \gamma^\mu (\not{p} + m_j) \gamma^\nu (\not{p} - k_2 + m_l)}{((p + k_1)^2 - m_i^2)(p^2 - m_j^2)((p - k_2)^2 - m_l^2)} + a_{ijl}^{\mu\nu}, \quad (33.18a)$$

$$a_{ijl}^{\mu\nu} = 2 \int d^D \hat{p} \text{Tr} \{ (\not{p} - k_2 - m_l) \gamma_5 - (\not{p} + k_1 - m_i) \gamma_5 \} \times \frac{1}{\not{p} + k_1 - m_i} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - m_j} \gamma^\nu \frac{1}{\not{p} - k_2 - m_l}. \quad (33.18b)$$

Первый член в (33.18a) соответствует тому, что мы получили бы при непосредственном использовании уравнений движения $\partial_\mu \bar{q}_i \gamma^\mu \gamma_5 q_l = i(m_i + m_l) \bar{q}_i \gamma_5 q_l$; второй член описывает аномалию. Приняв в пространстве размерности D для γ -матриц коммутационные соотношения $\{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0$, второе слагаемое в формуле (33.18a) можно записать в виде

$$a_{ijl}^{\mu\nu} = -2 \int d^D \hat{p} \left\{ \text{Tr} \gamma_5 \frac{1}{\not{p} + k_1 - m_i} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - m_j} \gamma^\nu + \text{Tr} \gamma_5 \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - m_j} \gamma^\nu \frac{1}{\not{p} - k_2 - m_l} \right\}. \quad (33.18b)$$

Отсюда заключаем, что тензор $a^{\mu\nu}$ равен нулю, так как каждый член выражения (33.18b) представляет собой антисимметричный тензор, зависящий от единственного вектора (первый член зависит от вектора k_1 , второй — от вектора k_2), который обращается в нуль. Между прочим, отсюда видно, что тензор a фактически не зависит от масс, так как производная $(\partial/\partial m)a^{\mu\nu}$ сходится, и, таким образом, это доказательство применимо. Следовательно, можно написать $a_{ijl}^{\mu\nu} \equiv a^{\mu\nu}$, где тензор $a^{\mu\nu}$ получается из исходного тензора, если

в нем массы всех частиц положить равными нулю. Аналогичные аргументы показывают, что тензор $a^{\mu\nu}$ должен иметь вид

$$a^{\mu\nu} = a \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} k_{1\alpha} k_{2\beta}, \quad a = \text{constant}, \quad (33.19a)$$

так что величину a можно получить двойным дифференцированием тензора $a^{\mu\nu}$:

$$a = \frac{\partial^2}{\partial k_{1\alpha} \partial k_{2\beta}} a^{\mu\nu} \Big|_{k_i=0} \quad (33.19b)$$

Из этих рассуждений и из выражения (33.18в) следует равенство $a \equiv 0$, противоречащее теореме Велтмана – Сатерленда.

Оказывается, что вывод о тождественном равенстве нулю величины a фактически является иллюзорным. Если провести замену переменных, например $p \rightarrow p + \xi k_2$, в интеграле (33.18в), то мы получим конечный не равный нулю результат, зависящий от параметра ξ : $a = -\xi/(2\pi^2)$. Отсюда видно, что коммутационные соотношения $\{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0$ ¹⁾ приводят к неопределенному значению аномалии. Однако если начать с формулы (33.18б) и не предполагать антикоммутативности матриц γ_μ и γ_5 , то получим

$$a \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} = -2 \int d^D \hat{p} \text{Tr} \gamma_5 \left\{ \frac{1}{\not{p}} \gamma^\alpha \frac{1}{\not{p}} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p}} \gamma^\nu \frac{1}{\not{p}} \gamma^\beta - \frac{1}{\not{p}} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p}} \gamma^\nu \frac{1}{\not{p}} \gamma^\beta \frac{1}{\not{p}} \gamma^\alpha \right\}.$$

Выполняя симметричное интегрирование (приложение Б) и пользуясь только правилами вычислений, приведенными в приложении А для пространства размерности $D \neq 4$, получим однозначный результат

$$a \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{8(D-1)(4-D)}{D(D+2)} \cdot \frac{i}{16\pi^2} \cdot \frac{2}{4-D} \cdot \text{Tr} \gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta \\ + O(4-D) \xrightarrow{D \rightarrow 4} \frac{-1}{2\pi^2}.$$

В этом заключается одна из особенностей аномалии: значение *конечного* фейнмановского интеграла зависит от способа регуляризации. К счастью, этой проблемы можно избежать, если использовать теорему Велтмана – Сатерленда, из

¹⁾ Такие коммутационные соотношения внутренне противоречивы. Например, используя формулы, приведенные в приложении А для пространства размерности $D \neq 4$, получим $\text{Tr} \gamma_5 \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\alpha \gamma^\sigma = (6-D) \text{Tr} \gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma$, в то время как, предположив коммутативность, можем получить выражения $\text{Tr} \gamma_5 \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\alpha \gamma^\sigma = -\text{Tr} \gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\alpha \gamma^\sigma \gamma^\alpha = (D-2) \text{Tr} \gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma$, которые отличаются от предыдущих членами $O(4-D)$. Но эти проблемы возникают только в том случае, если имеется по меньшей мере четыре γ -матрицы.

которой можно заключить, что во всяком случае существует *единственное* значение величины a^{11} , совместимое с калибровочной инвариантностью, а именно

$$a_{ijl}^{\mu\nu} = a^{\mu\nu} = -\frac{1}{2\pi^2} \epsilon^{\mu\alpha\beta} k_{1\alpha} k_{2\beta}. \quad (33.20)$$

Мы проверили, что выбранная нами регуляризация приводит именно к этому значению; проверку того, что при такой регуляризации сохраняется свойство калибровочной инвариантности, оставляем читателю в качестве простого упражнения.

Прежде чем продолжать, необходимо сказать несколько слов о теореме Велтмана – Сатерленда для безмассовых кварков. В этом случае первый член в правой части (33.18а) отсутствует; кажется, что теперь нельзя сохранить прежний результат для тензора $a^{\mu\nu}$ (выражение (33.20)), так как это приводит к неравенству

$$q_\lambda R^{\lambda\mu\nu} = -\frac{1}{2\pi^2} \epsilon^{\mu\alpha\beta} k_{1\alpha} k_{2\beta} \neq 0,$$

противоречащему выводу из теоремы Велтмана – Сатерленда $q_\lambda R^{\lambda\mu\nu} = 0$. Но это не так: соотношение $q_\lambda R^{\lambda\mu\nu} = a^{\mu\nu}$ и значение тензора $a^{\mu\nu}$ по-прежнему справедливы. Причина состоит в том, что в случае $m = 0$ функции Φ_i в (33.7) имеют сингулярности вида $1/k_1 \cdot k_2$. Следовательно, теорема Велтмана – Сатерленда в этом случае неприменима. Это еще одна особенность треугольной аномалии: $\lim_{m \rightarrow 0} q_\lambda R^{\lambda\mu\nu} = 0$, но если с самого начала предположить частицы безмассовыми, т.е. $m = 0$, то

$$q_\lambda R_{m=0}^{\lambda\mu\nu} = a^{\mu\nu} \neq 0.$$

Вернемся к нашему обсуждению, в частности рассмотрим случай $m \neq 0$. Настоящий метод демонстрирует, как можно доказать, что данный результат не перенормируется. Теорема Велтмана – Сатерленда представляет собой точное утверждение; как уже было показано, ее достаточно для того, чтобы доказать, что выражение (33.20) при учете поправок высших порядков не изменяется. Рассмотрим теперь типичный вклад высшего порядка, которому соответствует диаграмма рис. 25, в. Его можно записать в виде интегралов по им-

¹¹⁾ В действительности ситуация еще сложнее; по-видимому, значения поправок высших порядков к тензору $a^{\mu\nu}$ меняются при переходе от одной регуляризационной процедуры к другой, даже если обе они сохраняют калибровочную инвариантность. Обсуждение этого вопроса и дальнейшие ссылки заинтересованный читатель может найти в работе: Jones D. R., Leveille J. P., The Two Loop Axial Anomaly in $N = 1$ Supersymmetric Yang – Mills Theory. Univ. of Michigan preprint UM. He. 81-67, 1981 (не опубликовано).

пульсам кварка и глюона. Но в этом случае вместо треугольника в диаграмме фигурирует семиугольник (рис. 25, 2), для которого интеграл по кварковым переменным сходится, и, следовательно, можно непосредственно перейти к пределу $D \rightarrow 4$; при этом интеграл тождественно обращается в нуль. Кроме того, приведенные выше доводы показывают, что аномалия связана фактически с поведением фигурирующих в теории величин в ультрафиолетовом пределе, поэтому ожидается, что точность выражения (33.13) не будет нарушена непертурбативными эффектами.

Мы не рассматриваем здесь детального доказательства этого утверждения, а отсылаем читателя к литературе¹⁾. Но мы приведем альтернативный вывод [268], из которого виден ультрафиолетовый характер треугольной аномалии. Аксиальный ток представляет собой произведение двух полевых функций, взятых в одной и той же пространственно-временной точке; поэтому его можно определить в виде

$$A_q^\mu(x) = \lim_{\xi \rightarrow 0} A_{gn}^\mu(x, \xi),$$

$$A_{gn}^\mu(x, \xi) \equiv \bar{q}\left(x + \frac{\xi}{2}\right) \gamma^\mu \gamma_5 q\left(x - \frac{\xi}{2}\right). \quad (33.21)$$

Однако в случае $\xi \neq 0$ эти выражения не обладают свойством калибровочной инвариантности. Для восстановления калибровочной инвариантности необходимо заменить выражения (33.21) (см. приложение II) выражением

$$A_{gi}^\mu(x, \xi) \equiv \bar{q}(x + \xi/2) \gamma^\mu \gamma_5 e^{ie \int_x^{x+\xi/2} dy_\mu A^\mu(y)} q(x - \xi/2).$$

Дивергенция имеет вид

$$\partial_\mu A_{gi}^\mu(x, \xi) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \{2im_q \bar{q}(x) \gamma_5 q(x) + ig A_{gi}^\mu(x, \xi) F_{\mu\lambda} \xi^\lambda + O(\xi^2)\}.$$

Поскольку функция $A_f^\mu(x, \xi)$ в пределе $\xi \rightarrow 0$ расходится как $1/\xi$, второй член в правой части в этом пределе не равен нулю. Точные вычисления [80, 268] показывают, что, как и ожидалось, окончательный результат совпадает с (33.14).

Обсуждение вопроса о токах с аномалиями для любого типа взаимодействий можно найти в работе [263].

¹⁾ Подробное обсуждение этого вопроса см. в обзорах [8, 107]. Треугольная диаграмма является единственной диаграммой, обладающей простыми аномалиями; но она приводит к вторичным аномалиям в квадратных и пятиугольных графиках. Триаксиальный треугольный график содержит аномалию, тесно связанную с аномалией аксиально-векторного графика.

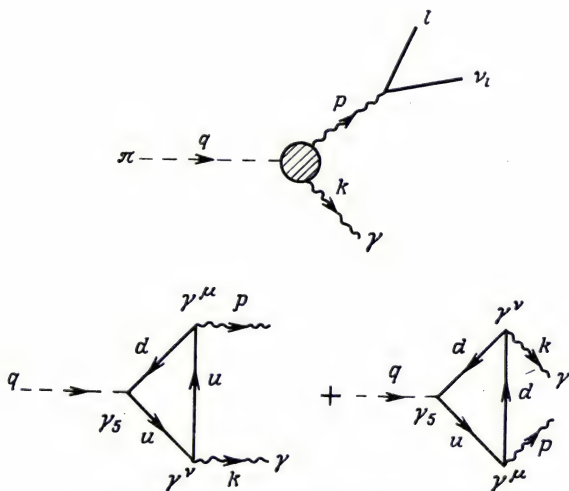


Рис. 26. Процесс $\pi \rightarrow (l \nu_l)_{\text{вектор}} + \gamma$.

Аномалиями обладают не только аксиальные токи. След тензора энергии-импульса Θ_{μ}^{μ} также представляет собой аномалию, обусловленную тем, что в процессе перенормировки нарушается масштабная инвариантность. Этот круг вопросов подробно обсуждается в работе [60], а в контексте КХД – в работе [74]. Но эта аномалия довольно безобидна; действительно, ее анализ тесно связан с ренормализационной группой.

§ 34. Распады мезонов: эффекты, обусловленные массами кварков

1. Легкие кварки и радиационные распады

Рассмотрим радиационные распады мезонов¹⁾

$$\pi^+ \rightarrow l^+ \nu_l \gamma, \quad K^+ \rightarrow l^+ \nu_l \gamma, \quad l = e, \mu,$$

которые тесно связаны с процессом $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$. Мы рассмотрим первый из этих распадов; распад K^+ -мезона может быть исследован тем же методом с очевидными изменениями (замена s -кварка на d -кварк и т.д.).

Этот распад происходит в два этапа: на первом из них лептонный ток аксиален, а на втором он носит векторный характер. Последний связан с вакуумным средним (обозначение кинематических переменных см. на рис. 26):

$$T_W^{\mu\nu}(p, k) = \int d^4x d^4y e^{i(x \cdot p + y \cdot k)} \langle TV^{\mu}(x) J^{\nu}(y) \partial A(0) \rangle_0, \quad (34.1)$$

¹⁾ Подробное описание общих свойств этих распадов можно найти в книге [198].

где, как и раньше, J — электромагнитный ток, а A и V определяются формулами

$$V^\mu = \bar{u}\gamma^\mu d, \quad A^\lambda = \bar{d}\gamma^\lambda \gamma_5 u.$$

Использование уравнений движения приводит к равенствам

$$\partial_\mu V^\mu = i(m_u - m_d)\bar{u}d, \quad (34.2)$$

$$\partial_\lambda A^\lambda = i(m_u + m_d)\bar{d}\gamma_5 u. \quad (34.3)$$

Дивергенция электромагнитного тока, конечно, равна нулю. Как и при изучении распада $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$, рассмотрим вакуумное среднее

$$R_W^{\mu\nu\lambda}(p, k) = i \int d^4x d^4y e^{i(x \cdot p + y \cdot k)} \langle TV^\mu(x) J^\nu(y) A^\lambda(0) \rangle_0, \quad (34.4)$$

которое представим в виде

$$R_W^{\mu\nu\lambda}(p, k) = \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} p_\rho \Phi_1 + \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} k_\rho \Phi_2 + O(p^3, k^3). \quad (34.5)$$

Свертка этого выражения с компонентой импульса k_ν приводит к равенству $\Phi_1 = 0$, но если массы кварков m_u и m_d различны, то требовать выполнения равенства $p_\mu R^{\mu\nu\lambda} = 0$ нельзя. Вместо этого имеют место равенства

$$p_\mu R^{\mu\nu\lambda} = \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} p_\mu k_\rho \Phi_2,$$

$$q_\lambda R^{\mu\nu\lambda} = \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} p_\lambda k_\rho \Phi_2.$$

Таким образом, мы приходим к соотношению

$$p_\mu R^{\mu\alpha\beta} = q_\lambda R^{\alpha\beta\lambda}. \quad (34.6)$$

Учитывая формулу (34.2), для левой и правой частей получаем

$$p_\mu R^{\mu\alpha\beta} = i(m_d - m_u) \int d^4x d^4y e^{i(x \cdot p + y \cdot k)} \langle TS(x) J^\alpha(y) A^\beta(0) \rangle_0, \quad (34.7)$$

$$q_\lambda R^{\alpha\beta\lambda} = i(m_d + m_u) \int d^4x d^4y e^{i(x \cdot p + y \cdot k)} \langle TP(0) J^\beta(y) V^\alpha(x) \rangle_0 + a^{\alpha\beta}, \quad (34.8)$$

где использованы обозначения

$$S(x) \equiv \bar{u}(x)d(x), \quad P(x) \equiv \bar{d}(x)\gamma_5 u(x),$$

а тензор $a^{\alpha\beta}$ представляет собой аномалию. Если ввести тензор $S^{\alpha\beta}$ по формуле $S^{\alpha\beta} = p_\mu R^{\mu\alpha\beta}$, то из уравнений (34.6) и (34.8) получим

$$T_W^{\alpha\beta} + S^{\alpha\beta} = a^{\alpha\beta}.$$

Как показано в § 33, тензор $a^{\alpha\beta}$ не зависит от масс кварков, и поэтому окончательно получаем

$$T_W^{\alpha\beta} + S^{\alpha\beta} = \frac{-1}{2\pi^2} \epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} p_\rho k_\sigma. \quad (34.9)$$

Если бы масса u -кварка m_u была равна массе d -кварка m_d , то тензор $S^{\alpha\beta}$ был бы равен нулю и мы получили бы

$$T_W^{\alpha\beta} = T^{\alpha\beta} = \frac{-1}{2\pi^2} \epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} p_\rho k_\sigma, \quad (34.10)$$

т.е. векторная часть распада $\pi^+ \rightarrow e^+ \nu \gamma$ с точностью до известных факторов была бы равна амплитуде распада $\pi^0 \rightarrow \gamma \gamma$ (см., например, [8]). Поскольку массы u - и d -кварков не равны ($m_u \neq m_d$) в соотношение (34.10) должны быть внесены поправки. В общем случае вычислить их не удастся, но есть одна ситуация, для которой точный результат может быть доказан во всех порядках теории возмущений квантовой хромодинамики¹⁾. Если $m_u = 0$, то преобразования

$$u \rightarrow \gamma_5 u, \quad d \rightarrow d$$

являются преобразованиями симметрии для лагранжиана КХД. При этих преобразованиях

$$S^+ \rightarrow P, \quad A \rightarrow V,$$

и, таким образом, справедливо равенство $T_W^{\alpha\beta} = S^{\alpha\beta}$. Поэтому мы модифицируем выражение (34.10) так, чтобы оно имело вид

$$T_W^{\alpha\beta} = \frac{-1}{4\pi} \epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} p_\rho k_\sigma, \quad (34.11)$$

т.е. введем множитель $1/2$ в амплитуду и коэффициент $1/4$ в ширину распада. Хотя имеются некоторые экспериментальные указания на существование этого эффекта, данный вопрос пока недостаточно изучен, и мы о нем говорить больше не будем.

2. Тяжелые кварки и механизм ГИМ

В § 33 были рассмотрены главным образом легкие кварки, т. е. кварки, массы которых малы по сравнению с Λ . Теперь же мы рассмотрим тяжелые кварки, массы которых удовлетворяют условию $m \gg \Lambda$. К их числу принадлежат кварки c и b .

¹⁾ См. работу [38]. В отличие от случая аномалии неизвестно, влияют ли на этот результат непертурбативные поправки.

В отличие от случая легких кварков здесь едва ли можно ожидать выполнения предположения о гладкости функций, несколько вольно называемого гипотезой ЧСАТ. Таким образом, необходимо обратиться к какому-то другому источнику информации о массах тяжелых кварков.

Первое замечание состоит в том, что кажется маловероятным, чтобы приблизительное равенство вакуумных средних

$$\langle \bar{u}u \rangle \approx \langle \bar{d}d \rangle \approx \langle \bar{s}s \rangle$$

могло быть распространено на величины $\langle \bar{c}c \rangle$ и $\langle \bar{b}b \rangle$. Однако мы ожидаем выполнения неравенств

$$\langle \alpha_s G^2 \rangle^{1/4}, |\langle \bar{q}_h q_h \rangle|^{1/3} \ll m_h, \quad h = c, b.$$

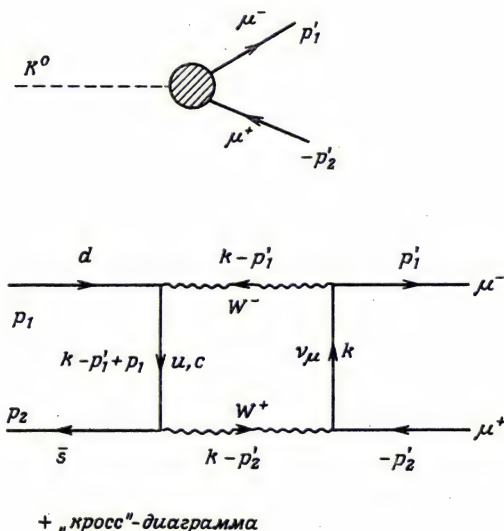
Если принять эти предположения, то очевидно, что большую часть массы тяжелого адрона можно приписать массе конститuentного кварка, и, таким образом,

$$\hat{m}_c \approx \frac{m_\psi}{2} \approx 1,6 \text{ ГэВ}, \quad \hat{m}_b \approx \frac{m_\tau}{2} \approx 5 \text{ ГэВ}.$$

До сих пор наиболее точные оценки масс тяжелых кварков получаются из правил сумм, подобных рассмотренным в § 32 и 36. Подробное изложение можно найти в работе [209] и цитируемой там литературе. Мы же обратимся к другому важному эффекту, связанному с массами кварков, — механизму Глэшоу — Илиопулоса — Майани (ГИМ) [146]. В самом деле, масса c -кварка $m_c \approx 1,6 \text{ ГэВ}$ была предсказана еще до экспериментального обнаружения J/Ψ -мезона в работе [146] и в статье [133], в которой было дано дальнейшее усовершенствование метода. Подробное рассмотрение различных случаев можно найти в работе [133] и в обзоре [132]. Здесь мы рассмотрим типичный пример, а именно распад $K^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$. В низшем порядке теории возмущений по константе слабого взаимодействия и в нулевом порядке по константе α_s этот распад описывается диаграммой рис. 27. Эту диаграмму мы вычислим точно. Соответствующая амплитуда процесса имеет вид¹⁾

$$\mathcal{A} = g_W^4 \sum_{f=u,c} \delta_f \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \times \left\{ \left(\gamma_\mu \frac{1-\gamma_5}{2} k \gamma_\nu \frac{1-\gamma_5}{2} \right) \left(\gamma^\nu \frac{1-\gamma_5}{2} (k - p'_1 + p_1 + m_f) \gamma^\mu \frac{1-\gamma_5}{2} \right) \right. \\ \left. \times \frac{k^2 [(k - p'_1)^2 - M_W^2] [(k - p'_1 + p_1)^2 - m_f^2] [(k - p'_2)^2 - M_W^2]}{k^2 [(k - p'_1)^2 - M_W^2] [(k - p'_1 + p_1)^2 - m_f^2] [(k - p'_2)^2 - M_W^2]} \right\}$$

¹⁾ Для первой скобки должны быть взяты матричные элементы по спинорам, отвечающим лептонам, а для второй — по спинорам, соответствующим кваркам.


 Рис. 27. Распад $K^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$ и характерная диаграмма, дающая вклад в этот процесс.

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\left(\gamma_\mu \frac{1-\gamma_5}{2} k \gamma_\nu \frac{1-\gamma_5}{2} \right) \left(\gamma^\mu \frac{1-\gamma_5}{2} (k-p'_1 + p_1 + m_f) \gamma^\nu \frac{1-\gamma_5}{2} \right)}{k^2 [(k-p'_1)^2 - M_W^2] [(k-p'_1 + p_1)^2 - m_f^2] [(k-p'_2)^2 - M_W^2]} \Bigg\} \\
 & = g_W^4 \sum_f \delta_f \int d^D \hat{k} \frac{1}{k^2 [(k-p'_1)^2 - M_W^2] [(k-p'_1 + p_1)^2 - m_f^2] [(k-p'_2)^2 - M_W^2]} \\
 & \times \left\{ \left(\gamma_\mu k \gamma_\nu \frac{1-\gamma_5}{2} \right) \left[\gamma^\nu (k-p'_1 + p_2) \gamma^\mu \frac{1-\gamma_5}{2} + (\mu \leftrightarrow \nu) \right] \right\} \\
 & + O(m_f^2/M_W^4). \tag{34.12}
 \end{aligned}$$

Здесь использованы обозначения $\delta_u = \cos \theta_C \sin \theta_C$, $\delta_c = -\cos \theta_C \sin \theta_C$, где θ_C — угол Кабиббо. Хотя интеграл сходится, мы записали его в пространстве произвольной размерности D по причинам, которые в дальнейшем станут очевидными. Должно быть ясно, что при $m_c = m_u$ выражение (34.12) равно нулю; следовательно, ширина распада $K^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$ должна быть пропорциональна разности $m_c^2 - m_u^2$. Мы будем использовать приближение $m_u \approx 0$; тогда выраже-

ние (34.12) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = & -g_W^4 (\cos \theta_C \sin \theta_C) \\ & \times \int d^D k \frac{m_c^2}{k^2 [(k-p_1')^2 - M_W^2] [(k-p_1' + p_1)^2 - m_c^2] (k-p_1' + p_2)^2} \\ & \times \frac{(\gamma_\mu k \gamma_\nu (1-\gamma_5)/2) [\gamma^\nu (k-p_1 + p_2) \gamma^\mu (1-\gamma_5)/2 + (\mu \leftrightarrow \nu)]}{(k-p_2')^2 - M_W^2}. \quad (34.13) \end{aligned}$$

Этот интеграл содержит импульс k в степени 10 в знаменателе и в степени 2 в числителе; следовательно, можно работать в пределе $M_W^2 \rightarrow \infty$ и получить особенность не большую, чем логарифмическая. На самом деле эта особенность сокращается вкладом других диаграмм (главным образом распадами через γ -кванты и Z -бозоны в промежуточном состоянии). Пренебрегая членами, подавленными в m_K^2/M_W^2 раз по сравнению с ведущими членами, получаем для амплитуды распада выражение

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = & -g_W^4 (\cos \theta_C \sin \theta_C) \frac{m_c^2}{M_W^4} \cdot \frac{1}{4} \\ & \times \int d^D k \frac{(\gamma_\mu k \gamma_\nu (1-\gamma_5)) (\gamma^\nu k \gamma^\mu (1-\gamma_5) + (\mu \leftrightarrow \nu))}{k^4 (k^2 - m_c^2)} \\ = & -g_W^4 (\cos \theta_C \sin \theta_C) \frac{m_c^2}{4M_W^4} [\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu (1-\gamma_5)] [\gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\mu (1-\gamma_5) \\ & + \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu (1-\gamma_5)] \frac{i}{16\pi^2} \left(N_\epsilon - \log \frac{m_c^2}{v_0^2} - 1/2 \right). \end{aligned}$$

Как объяснялось выше, множитель $N_\epsilon - \log(m_c^2/v_0^2) - 1/2$ при учете остальных диаграмм заменяется коэффициентом -2 . (Благодаря такому сокращению этот распад фактически происходит по схеме $K \rightarrow 2\gamma \rightarrow \mu^+ \mu^-$.) В окончательный результат входят только члены, не зависящие от кинематических переменных; он оказывается чувствительным к величине отношения m_c^2/M_W^4 . Мы пренебрегаем здесь сильными взаимодействиями; при более детальном анализе их следует учитывать. Заинтересованного читателя мы отсылаем к цитированной выше литературе.

§ 35. Пертурбативные эффекты и эффекты, обусловленные спонтанным нарушением киральной симметрии, в кварковом и глюонном пропагаторах

В гл. II вычислены пертурбативные (теоретиковозмущенческие) вклады в глюонный и кварковый пропагаторы. Они выражались через массы частиц,

фигурирующие в лагранжиане КХД, которые обычно называют пертурбативными, механическими или (для кварков) "токовыми" массами. Однако, как известно, заметные успехи были достигнуты в так называемых конституентных (составных) моделях, в которых "конституентные" массы кварков u , d и s полагают равными ~ 400 МэВ, а массу глюона — равной ~ 800 МэВ. В этом и следующих параграфах будет показано, что непертурбативные вклады в кварковый S и глюонный D пропагаторы имитируют массы частиц. Будет показано, что, хотя эти массы нельзя отождествлять с конституентными массами, тем не менее данный эффект фактически ответствен за массы адронов, подобных ρ -мезону.

Начнем с рассмотрения кваркового пропагатора

$$S_{\xi}^{ij}(p) = \int d^D x e^{ip \cdot x} \langle T q^i(x) \bar{q}^j(0) \rangle_{\text{vac}}, \quad (35.1)$$

который мы вычислим при больших значениях импульса p . Запишем для него операторное разложение, пренебрегая членами, которые при усреднении по вакуумным состояниям обращаются в нуль. Такое разложение имеет вид

$$T q^i(x) \bar{q}^j(0) = \delta_{ij} \left\{ C_0(x) \cdot 1 - C_1(x) \sum_l : \bar{q}^l(0) q^l(x) : + \dots \right\}; \quad (35.2)$$

в § 7 и 9 рассмотрен только коэффициент $C_0(x)$. В нулевом порядке теории возмущений по константе взаимодействия α_g получаем приближенное равенство (α и β — дираковские индексы)

$$: \bar{q}_{\beta}(0) q_{\alpha}(x) : \underset{x \rightarrow 0}{\approx} \frac{1}{4} \left\{ \delta_{\alpha\beta} - \frac{im_q x_{\mu}}{D} \gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \right\} : \bar{q}(0) q(0) :.$$

Если через S_P и S_{NP} обозначить соответственно пертурбативный и непертурбативный вклады в кварковый пропагатор, то получим (рис. 28)

$$S = S_P + S_{NP}, \quad S_{NP}^{(0)ij}(p) = -(2\pi)^D \frac{\delta_{ij} \langle \bar{q} q \rangle_{\text{vac}}}{4n_c} \left\{ 1 - \frac{m_q}{D} \gamma^{\mu} \frac{\partial}{\partial p^{\mu}} \right\} \delta(p), \quad n_c = 3. \quad (35.3)$$

Последнее выражение при $p \neq 0$ тождественно обращается в нуль. Однако будет показано, что члены типа (35.3) играют важную роль при изучении масс наблюдаемых частиц (ρ , ϕ , ...). Поправки второго порядка и непертурбативной части кваркового пропагатора S_{NP} проще всего вычислить, записав их в виде

$$S_{NP}^{(2)ij}(p) = \sum \frac{1}{p - m_q} g^2 \int d^D k i \gamma_{\mu} t_{ik}^a S^{kk'}(p + k) i \gamma_{\nu} t_{kj}^b \delta_{ab} \\ \times \frac{-g^{\mu\nu} + \xi k^{\mu} k^{\nu} / k^2}{k^2} \cdot \frac{i}{p - m_q},$$

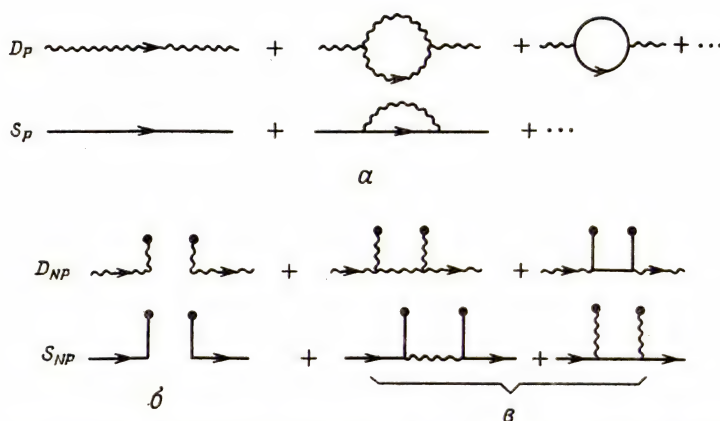


Рис. 28. Глюонный и кварковый пропагаторы; α — вклад, описываемый теорией возмущений; β — ведущие непертурбативные поправки; γ — ведущие связанные непертурбативные поправки.

и заменив в правой части $S^{kk'}$ на величину $S_{NP}^{(0)kk'}$. При этом получаем

$$S_{NP} = S_{NP}^{(0)} + S_{NP}^{(2)} + \dots,$$

$$S_{\xi NP}^{(2)ij}(p) = -i\delta_{ij}\alpha_g \frac{\pi C_F \langle \bar{q}q \rangle_{\text{vac}}}{3p^4} \left\{ D - \xi - \frac{2(D-2)}{D} (1-\xi) \frac{m_q \not{p}}{p^2} \right\} + O\left(\frac{m_q}{p^6}\right) + O\left(\frac{m_q^4}{p^2}\right). \quad (35.4)$$

Отметим, что этот результат зависит от используемой калибровки, поэтому выражение

$$M_{\xi}(p) = \frac{-\pi\alpha_g C_F \langle \bar{q}q \rangle_{\text{vac}}}{3p^2} (4 - \xi)$$

нельзя интерпретировать как физическую массу частицы.

Аналогичные вычисления можно выполнить и для глюонного пропагатора (рис. 28):

$$D_{\xi ab}^{\mu\nu}(k) = \int d^4x e^{ik \cdot x} \langle TB_a^{\mu}(x) B_b^{\nu}(0) \rangle_{\text{vac}},$$

$$TB_a^{\mu}(x) B_b^{\nu}(0) = \delta_{ab} \left\{ C_0^{\mu\nu}(x) \cdot 1 + C_1^{\mu\nu}(x) \sum_c : G_c^{\alpha\beta}(0) G_{c\alpha\beta}(0) : + \dots \right\}, \quad (35.5)$$

и получить результат

$$D = D_P + D_{NP},$$

$$D_{NP}^{(0)\mu\nu}(k) = (2\pi)^D \delta_{ab} \frac{\langle G^2 \rangle_{\text{vac}}}{4(n_c^2 - 1)D(D-1)(D+2)} \times \{(D+1)g^{\mu\nu}\partial^2 - 2\partial^\mu\partial^\nu\} \delta(k). \quad (35.6)$$

Следует отметить, что непертурбативный вклад в глюонный пропагатор $D_{NP}^{(0)}$ оказывается поперечным. Этот член дает также вклад в поправку второго порядка $S_{NP}^{(2)}$ к кварковому пропагатору S ; эта добавка к выражению (35.4) имеет вид

$$S_{G^2 NP}^{(2)}(p) = \frac{2C_F}{3(n_c^2 - 1)} \cdot \frac{\pi \langle \alpha_s G^2 \rangle_{\text{vac}}}{p^4} \cdot \frac{i}{\not{p}}. \quad (35.7)$$

Можно оценить также вклады вакуумных средних $\langle \bar{q}q \rangle$, $\langle G^2 \rangle$ в глюонный пропагатор D . Эти вклады приводят к появлению добавки к массе глюонов, которая, к сожалению, зависит от калибровки. В действительности, как будет показано в § 36, массы физических частиц *не связаны* с членом типа M_ξ или аналогичным членом для глюонов; такие члены дают вклады только в следующем порядке теории возмущений. Основной вклад дают выражения (35.3) и (35.6). Подробное обсуждение этого вопроса в связи с вакуумным средним $\langle \bar{q}q \rangle$ можно найти в работе [216].

§ 36. Массы адронов

Вместо обсуждения общего метода исследования проблемы масс адронов¹⁾ мы рассмотрим один типичный пример, а именно вычисление массы ϕ -мезона. Рассмотрим с этой целью двухточечную функцию

$$\Pi_\phi^{\mu\nu}(q) = i \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle T \phi^\mu(x) \phi^\nu(0) \rangle_{\text{vac}} \\ \equiv (-g^{\mu\nu} q^2 + q^\mu q^\nu) \Pi_\phi(q^2), \quad (36.1)$$

¹⁾ Метод, которому мы следуем, был предложен в работах Шифмана, Вайнштейна и Захарова [229, 230]. Дальнейшее развитие этот метод получил в работах тех же авторов, а также в статьях [223] и цитируемой там литературе. Недавно этот метод был распространен на барионы (см. [171] и Chung I. et al., Heidelberg, preprint, 1981). Дальнейшие сведения о методе правил сумм, подобном описываемому здесь, см. в превосходном обзоре [209].

где ϕ^μ — оператор с квантовыми числами, аналогичными квантовым числам ϕ -мезона; он имеет вид

$$\phi^\mu(x) = C_\phi \bar{s}(x) \gamma^\mu s(x).$$

Константу C_ϕ можно получить из анализа процесса $\phi \rightarrow e^+ e^-$, но мы здесь не будем обсуждать этот вопрос. Функция $\Pi(q^2)$ ведет себя как $\log q^2$; следовательно, любая ее производная

$$\frac{d^N \Pi_\phi(q^2)}{(dq^2)^N} \equiv \Pi_\phi^{(N)}(q^2)$$

при $N \geq 1$ удовлетворяет дисперсионным соотношениям без какого-либо дополнительного вычитания. При значениях $|q^2|$ вблизи m_ϕ^2 можно аппроксимировать функцию $\Pi^{(N)}_\phi(q^2)$ единственным резонансом — ϕ -мезоном. Таким образом, можно написать приближенное выражение

$$\Pi_\phi^{(N)}(q^2) \approx \frac{N! a}{(m_\phi^2 - q^2)^{N+1}}.$$

Взяв отношение двух последовательных производных, находим

$$r_\phi(q^2) \equiv \frac{\Pi_\phi^{(N)}(q^2)}{\Pi_\phi^{(N+1)}(q^2)} \approx \frac{1}{N+1} (m_\phi^2 - q^2). \quad (36.2)$$

Если вычислить производную $\Pi_\phi^{(N)}$ в рамках квантовой хромодинамики и использовать пертурбативные значения масс кварков, то получим

$$\Pi_\phi^{(N)}(q^2) \approx \frac{3C_\phi^2}{12\pi^2} (N-1)! \frac{1}{(-q^2)^N} \left\{ 1 + \frac{\hat{m}_s^2}{q^2} + O[\alpha_s(-q^2)] \right\}. \quad (36.3)$$

Но полученное выше значение \hat{m}_s не удовлетворяет соотношению (36.2) при физическом значении массы ϕ -мезона. Это показывает, что существенную роль играют непертурбативные вклады. Проще всего их учесть, использовав вычисления непертурбативных частей кваркового S и глюонного D пропагаторов, выполненные в § 35. В низшем порядке теории возмущений по константе связи α_s необходимо учесть лишь выражения (35.3) и (35.6). Тогда формула (36.3) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \Pi_\phi^{(N)}(q^2) \approx & \frac{3C_\phi^2}{12\pi^2} (N-1)! \frac{1}{(-q^2)^N} \times \left\{ 1 + \frac{\hat{m}_s^2}{(-q^2)} - \frac{4\pi^2 N(N+1)}{q^4} m_s \langle \bar{s}s \rangle_{\text{vac}} \right. \\ & \left. - \frac{3\pi N(N+1)}{8q^4} \langle \alpha_s G^2 \rangle_{\text{vac}} + O(\alpha_s) + O(q^{-6}) \right\}. \end{aligned} \quad (36.4)$$

Мы видим, что в пределе $-q^2/N \rightarrow \infty$ существенный (фактически главный) вклад в массу ϕ -мезона возникает от вакуумного среднего $\langle \alpha_s G^2 \rangle$. Таким образом, оказывается возможным в некотором смысле воспроизвести массы ρ , ω , ϕ , ..., используя "конституентные" массы, имеющие величину порядка $\langle \alpha_s G^2 \rangle^{1/4}$. Мы не будем более углубляться в этот вопрос, а сделаем лишь два замечания. Во-первых, использование "конституентных" масс в лучшем случае является грубым приближением. Это обусловлено тем, что вклад вакуумного среднего $\langle \alpha_s G^2 \rangle$ зависит от спина операторов (в нашем примере от спина оператора ϕ^μ), с которыми оно связано; в общем случае этот вклад оказывается различным для разных частиц типа ρ - и f^0 -мезонов. Во-вторых, в настоящее время выполнены вычисления более чем 50 адронных масс и параметров. Достигнутое согласие с экспериментом кажется впечатляющим, если вспомнить, что для этого требуется весьма ограниченное число параметров — массы кварков (u , d , s , c и b), параметр Λ и значения вакуумных средних $\langle \alpha_s G^2 \rangle$ и $\langle \bar{q}q \rangle$. При этом последние три параметра могут быть взяты из других источников.

В заключение этого параграфа приведем пример конкретного вычисления непертурбативного вклада, а именно вклада в поляризационный оператор $\Pi_\phi^{\mu\nu}(q)$, обусловленного кварковым конденсатом $\langle \bar{s}s \rangle$. Из формулы (36.1) имеем

$$\Pi_\phi^{\mu\nu}(q) = iC_\phi^2 \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle T \bar{s}(x) \gamma^\mu s(x) \bar{s}(0) \gamma^\nu s(0) \rangle_{\text{vac}}. \quad (36.5)$$

Таким образом,

$$\Pi_\phi^{\mu\nu}(q) = -iC_\phi^2 \int d^D \hat{k} \text{Tr} \gamma^\mu S_s(k) \gamma^\nu S_s(k+q). \quad (36.6)$$

Рассмотрев только пертурбативную часть кваркового пропагатора $S_s = S_P$, мы получили бы часть поляризационного оператора

$$\begin{aligned} \Pi_P^{\mu\nu}(q) &= \frac{8C_\phi^2 n_c}{6} \cdot \frac{1}{16\pi^2} (-g^{\mu\nu} q^2 + q^\mu q^\nu) \\ &\times (N_c - \log q^2 + \text{конечные члены} + O(m_s^2)). \end{aligned} \quad (36.7)$$

Непертурбативную часть поляризационного оператора мы получим, используя в формуле (36.6) полное выражение для кваркового пропагатора $S_s = S_P + S_{NP}$. Ведущим является смешанный член

$$\begin{aligned} \Pi_{NP}^{\mu\nu} &= -iC_\phi^2 \int d^D \hat{k} \text{Tr} \{ \gamma^\mu S_{NP}(k) \gamma^\nu S_P(k+q) \\ &+ \gamma^\mu S_P(k) \gamma^\nu S_{NP}(k+q) \}, \end{aligned} \quad (36.8)$$

где S_{NP} описывается (в ведущем порядке) выражением (35.3), а $S_P(k) = i(\mathcal{K} - m_s)$. Выполняя необходимые вычисления, получаем

$$\Pi_{NP}^{\mu\nu} = \frac{-2C_\phi^2 m_s \langle \bar{s}s \rangle_{\text{vac}}}{q^4} (-g^{\mu\nu} q^2 + q^\mu q^\nu),$$

как уже было показано в формуле (36.4).

§ 37. Проблема $U(1)$; глюонная аномалия

В § 33 в связи с распадом $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ мы рассмотрели треугольную аномалию. Там отмечалось, что эта аномалия не ограничивается фотонами. В частности, имеется глюонная аномалия. Определив ток формулой

$$A_0^\mu = \sum_{f=1}^n \bar{q}_f \gamma^\mu \gamma_5 q_f, \quad (37.1)$$

получим, что он также обладает аномалией

$$\partial_\mu A_0^\mu = i \sum_{f=1}^n \bar{q}_f \gamma_5 q_f + \frac{ng^2}{16\pi^2} \tilde{G}G, \quad (37.2)$$

где дуальный тензор \tilde{G} удовлетворяет соотношениям

$$\tilde{G}_a^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} G_{a\alpha\beta},$$

$$\tilde{G}G \equiv \sum_a \tilde{G}_a^{\mu\nu} G_{a\mu\nu}.$$

Ток (37.1) представляет собой так называемый $U(1)$ -ток, необычный во многих отношениях (являющийся чистым синглетом по группе аромата). В частности, с ним связана так называемая проблема $U(1)$, к обсуждению которой мы переходим.

Предположим, что имеется n легких кварков; рассмотрим только их, а возможным существованием тяжелых кварков (не относящихся к изучаемой проблеме) пренебрежем. Можно взять два легких кварка $n = 2$ (u , d) и обсуждать "проблему $SU(2) U(1)$ " или три легких кварка $n = 3$ (u , d , s) и говорить о "проблеме $SU(3) U(1)$ ". Возьмем $n^2 - 1$ матриц, действующих в пространстве ароматов $\lambda_1, \dots, \lambda_{n^2-1}$. Для группы $SU(3)$ они совпадают с матрицами Гелл-Манна, а для группы $SU(2)$ — с матрицами Паули. Любую эрмитову матрицу размерности $n \times n$ можно выразить в виде комбинации n^2 матриц $\lambda_1, \dots, \lambda_{n^2-1}$, $\lambda_0 \equiv 1$. Удобно принять, что индексы a, b, c пробегает ряд значений от 1 до $n - 1$

а индексы α, β, δ принимают значения $0, 1, \dots, n^2 - 1$. Благодаря только что сформулированному свойству полноты матриц λ_i достаточно рассмотреть то-
ки

$$A_\alpha^\mu = \sum \bar{q}_f \gamma^\mu \gamma_5 \lambda_{ff'}^\alpha q_{f'};$$

из них, конечно, только ток A_0 обладает аномалией. Пусть $N_1(x), \dots, N_k(x)$ — локальные операторы (простые или составные). Рассмотрим теперь величину

$$\langle \text{vac} | T A_\alpha^\mu(x) \prod_j N_j(x_j) | \text{vac} \rangle. \quad (37.3)$$

В случае $\alpha \neq 0$ из теоремы Голдстоуна следует, что в киральном пределе массы псевдоскалярных частиц P_a , имеющих квантовые числа токов A_a , равны нулю. Вводя общий для всех кварковых масс параметр ϵ и полагая $m_f = \epsilon r_f$, где коэффициент r_f ($f = 1, \dots, n$) в киральном пределе остается постоянным, получаем

$$m_a^2 \equiv m_{P_a}^2 \approx \epsilon. \quad (37.4)$$

Это было показано в § 31 (уравнения (31.4) и (31.5)). Следовательно, в этом пределе выражение (37.3) при $\alpha = a$ имеет полюс в точке $q^2 = 0$. Точнее говоря, это означает, что в киральном пределе, т.е. при нулевых значениях масс кварков, справедливо равенство

$$\lim_{q \rightarrow 0} \int d^4x e^{iq \cdot x} \partial_\mu \langle \text{vac} | T A_\alpha^\mu(x) \prod_j N_j(x_j) | \text{vac} \rangle \approx (\text{constant}) q_\mu \frac{1}{q^2}. \quad (37.5)$$

Если пренебречь аномалиями, то вывод формулы (37.4) можно повторить и для случая $\alpha = 0$, откуда мы получили бы, что частица $U(1)$ также в киральном пределе имеет нулевую массу [145]. В действительности это утверждение более точно сформулировано в работе [259], где получено неравенство $m_0 \leq \sqrt{n}$ (средняя m_a). Это неравенство свидетельствует о неправомерности всех наших построений, так как для группы $SU(2)$ выполняется соотношение $m_\pi \gg \sqrt{2} m_\pi$. Для группы $SU(3)$ масса m_π также нарушает это ограничение. В дополнение к этому было доказано [50], что при таких условиях распад $\eta \rightarrow 3\pi$ запрещен, что также противоречит эксперименту. Следовательно, нужно *предположить*, что выражение (37.3) для случая $\alpha = 0$ в пределе $\epsilon \rightarrow 0$ остается *регулярным*. Если бы мы могли доказать это, мы бы решили проблему $U(1)$. Этот вопрос подробнее обсуждается несколько ниже; здесь же мы просто предположим, что $U(1)$ -бозонов не существует, не задаваясь вопросом, можно ли доказать это в

рамках КХД. Совершенно очевидно, что, если бы не было аномалии, это предположение было бы противоречивым. Поэтому, возможно, полезно проследить, к каким результатам приводит одновременное отсутствие голдстоуновских бозонов P_0 и наличие аномалии в токе A_0 . В решении этого вопроса мы следуем прекрасному обзору [82].

Определенный формулой (37.1) ток A_0 инвариантен по отношению к калибровочным преобразованиям, но в киральном пределе не инвариантен по отношению к преобразованиям группы $U(1)$ вследствие аномалии, содержащейся в выражении (37.2). Как было показано для абелевых групп в работе [7], а для общего случая в работе [25], можно построить другой, инвариантный относительно преобразований группы $U(1)$ ток:

$$\hat{A}_0^\mu = A_0^\mu - 2\pi K^\mu, \quad (37.6)$$

где введен чисто глюонный ток

$$K^\mu = \frac{2g^2}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \sum B_{\alpha\nu} \left\{ \partial_\rho B_{\alpha\sigma} + \frac{1}{3} f_{abc} B_{b\rho} B_{c\sigma} \right\}. \quad (37.7)$$

В правильности этого выражения легко убедиться, заметив, что

$$\partial_\mu K^\mu = \frac{g^2}{32\pi^2} \tilde{G}G, \quad (37.8)$$

так что из формулы (37.2) в киральном пределе получаем

$$\partial_\mu \hat{A}_0^\mu = 0. \quad (37.9)$$

Следует отметить, что ток K , удовлетворяющий уравнению (37.8), определен неоднозначно, так как он зависит от используемой калибровки. В принципе выражение (37.6) записано для "голых" величин, но всегда можно провести перенормировку таким образом, что оно останется справедливым и для "одетых" величин. Конечно, причина состоит в том, что аномалия не перенормируется.

Генератором преобразований $U(1)$ должен быть сохраняющийся ток, а именно ток \hat{A}_0 . Следовательно, можно определить *киральность* χ соотношением

$$\delta(x^0 - y^0) [\hat{A}_0^0(x), N_j(y)] = -\chi_j \delta(x - y) N_j(y), \quad (37.10a)$$

или в интегральном виде

$$[\hat{Q}_0, N_j] = -\chi_j N_j, \quad (37.10b)$$

где $U(1)$ -киральный заряд имеет вид

$$\hat{Q}_0 = \int d\vec{x} \hat{A}_0^0(x). \quad (37.11)$$

Так как ток \hat{A} удовлетворяет уравнению (37.9), киральный заряд \hat{Q}_0 не зависит от времени, и, следовательно, можно ожидать, что не только соотношение (37.10) имеет смысл, но и числа χ_j не изменяются в процессе перенормировки. Чтобы доказать это более формально, рассмотрим вакуумное среднее

$$\langle \text{vac} | T \hat{A}_0^\mu(x) \prod_j N_j(x_j) | \text{vac} \rangle,$$

и применим к нему оператор дифференцирования ∂_μ . Мы получим тождество Уорда

$$\begin{aligned} \partial_\mu \langle \text{vac} | T \hat{A}_0^\mu(x) \prod_j N_j(x_j) | \text{vac} \rangle \\ = - \left\langle \sum_i \chi_i \delta(x - x_i) \right\rangle \langle \text{vac} | T \prod_j N_j(x_j) | \text{vac} \rangle; \end{aligned} \quad (37.12)$$

при выводе мы использовали соотношения (37.9) и (37.10а). Так как ток \hat{A} (частично) сохраняется, то, как мы уже знаем, он не изменяется в процессе перенормировок, и величина χ также должна обладать этими свойствами. В § 38 будет показано, что соотношение (37.12) и отсутствие $U(1)$ -бозонов приводят к довольно специфическим свойствам вакуума квантовой хромодинамики.

§ 38. Параметр θ , вакуум КХД, эффект безмассовых кварков и решение проблемы $U(1)$

До сих пор мы пользовались лагранжианом КХД (опуская члены, фиксирующие калибровку и описывающие вклад духов)

$$\mathcal{L} = \sum_q \bar{q}(i\not{D} - m)q - \frac{1}{4} GG. \quad (38.1)$$

Зададимся теперь вопросом: какие изменения возникнут при добавлении к лагранжиану (38.1) дополнительного члена

$$\mathcal{L}_{1\theta} = - \frac{\theta g^2}{32\pi^2} \tilde{G}G, \quad (38.2a)$$

так что полный лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L}_\theta = \mathcal{L} + \mathcal{L}_{1\theta}. \quad (38.2b)$$

В действительности последний член является единственным членом, совместимым

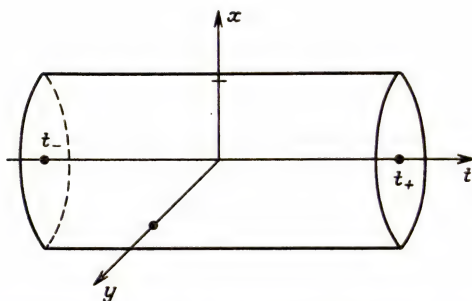


Рис. 29. Область интегрирования при вычислении оператора топологического заряда.

с требованиями калибровочной инвариантности и перенормируемости, который может быть добавлен к лагранжиану (38.1). Кроме того, как было показано в § 37, он представляет собой 4-дивергенцию и, следовательно, не приводит к изменению уравнений движения. Конечно, от этого члена можно избавиться, положив параметр θ равным нулю, однако, хотя и есть указания на то, что значение параметра θ очень мало, существуют также причины, по которым оно может быть не равным нулю. Во всяком случае интересно выяснить следствия выбора более общего выражения (38.2) для лагранжиана КХД.

Так как мы добавили новое взаимодействие, следует ожидать, что теперь физический вакуум будет зависеть от значения параметра θ ; поэтому мы будем использовать для него обозначение $|\theta\rangle$. Следующая наша задача состоит в исследовании зависимости функций Грина от параметра θ .

Для этого рассмотрим *оператор топологического заряда*¹⁾

$$Q_K = \frac{g^2}{32\pi^2} \int d^4x \tilde{G}G. \quad (38.3)$$

Используя формулу (37.8) и теорему Гаусса, запишем его в виде интеграла по поверхности

$$Q_K = \int d\sigma_\mu K^\mu.$$

В качестве поверхности интегрирования выберем цилиндр с осью, расположенной вдоль оси времени, и основаниями, лежащими при $t_+ \rightarrow +\infty$ и $t_- \rightarrow -\infty$

¹⁾ Более подробно о θ -вакууме и вопросах, обсуждаемых в этом параграфе, можно прочитать в § 43 — 45, где становятся ясными причины возникновения некоторых довольно специфических терминов.

(рис. 29). Устремив размеры цилиндра к бесконечности, получим

$$Q_K = \int d\vec{x} K^0(t_+ \rightarrow +\infty, \vec{x}) - \int d\vec{x} K^0(t_- \rightarrow -\infty, \vec{x}) \equiv K_+ - K_- . \quad (38.4)$$

Операторы K_{\pm} являются самосопряженными, переходящими друг в друга при обращении времени; поэтому их спектры совпадают. Обозначим их собственные векторы через $|n_{\pm}\rangle \equiv |n, t_{\pm} \rightarrow \pm\infty\rangle$; они удовлетворяют уравнению

$$K_{\pm} |n_{\pm}\rangle = n |n_{\pm}\rangle. \quad (38.5)$$

В силу эрмитовости операторов K_{\pm} физический вакуум можно разложить по собственным векторам этих операторов. Такое разложение имеет вид

$$|\theta\rangle = \sum c_n(\theta) |n_+\rangle = \sum c_n(\theta) |n_-\rangle; \quad (38.6)$$

коэффициенты c_n в первом и во втором равенстве одни и те же. Действительно, вакуум инвариантен по отношению к временным трансляциям; поэтому его можно рассматривать при $t = 0$. Тогда, применяя оператор обращения времени $U(T)$, мы получаем, что коэффициенты c_n в (38.6) одинаковы в обеих суммах. Теперь необходимо определить значения этих коэффициентов. Для этого применим оператор $i\partial/\partial\theta$ к функции Грина (вспомним формализм, развитый в § 2) и получим

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial\theta} \langle \theta | T \prod N_j(x_j) | \theta \rangle &= i \frac{\partial}{\partial\theta} \langle 0 | T \prod N_j^0(x_j) e^{i \int d^4x \{ \mathcal{L}_{\text{int}}^0(x) + \mathcal{L}_\theta^0(x) \}} | 0 \rangle \\ &= \frac{g^2}{32\pi^2} \int d^4x \langle 0 | T \tilde{G}^0(x) G^0(x) \prod N_j^0(x_j) e^{i \int d^4x \{ \mathcal{L}_{\text{int}}^0(x) + \mathcal{L}_\theta^0(x) \}} | 0 \rangle \\ &= \frac{g^2}{32\pi^2} \int d^4x \langle \theta | T \tilde{G}(x) G(x) \prod N_j(x_j) | \theta \rangle. \end{aligned} \quad (38.7)$$

Другими словами, оператор $i\partial/\partial\theta$ эквивалентен введению в формулу оператора топологического заряда Q_K . С учетом хронологического порядка операторов и формул (38.3) и (38.4) выражение (38.7) принимает вид

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial\theta} \langle \theta | T \prod N_j(x_j) | \theta \rangle &= \langle \theta | K_+ T \prod N_j(x_j) | \theta \rangle - \langle \theta | T \prod N_j(x_j) K_- | \theta \rangle. \end{aligned}$$

Разлагая его в ряд по собственным векторам операторов K_{\pm} , получаем урав-

нение¹⁾

$$i \frac{\partial}{\partial \theta} \sum_{n,m} c_n^*(\theta) c_m(\theta) = \sum_{n,m} (n-m) c_n^*(\theta) c_m(\theta),$$

решения которого имеют вид

$$c_n(\theta) = C e^{in\theta}. \quad (38.8)$$

Произвольная константа C может быть выбрана равной единице.

Следствием формулы (38.8) является ортогональность вакуумов, соответствующих разным значениям параметра θ :

$$\langle \theta | \theta' \rangle = \delta(\theta - \theta'), \quad (38.9)$$

так что с точностью до периода каждому значению θ отвечает свой, отличный от других физический мир.

До сих пор мы не учитывали существования фермионов. Теперь мы покажем, как изменяется проведенный выше анализ при введении в рассмотрение n фермионов с исчезающе малой массой. Начнем с того, что напомним снова знакомое нам тождество Уорда (37.12):

$$\begin{aligned} \partial_\mu \langle \theta | T \hat{A}_0^\mu(x) \prod_j N_j(x_j) | \theta \rangle \\ = - \left\{ \sum_l \chi_l \delta(x - x_l) \right\} \langle \theta | T \prod_j N_j(x_j) | \theta \rangle, \end{aligned}$$

которое мы проинтегрируем по d^4x :

$$\begin{aligned} \int d^4x \partial_\mu \langle \theta | T \hat{A}_0^\mu(x) \prod_j N_j(x_j) | \theta \rangle \\ = - (\sum_l \chi_l) \langle \theta | T \prod_j N_j(x_j) | \theta \rangle. \end{aligned}$$

Используя формулы (37.6) и (37.8), получим выражение

$$\begin{aligned} \int d^4x \partial_\mu \langle \theta | T \sum_f \bar{q}_f(x) \gamma^\mu \gamma_5 q_f(x) \prod_j N_j(x_j) | \theta \rangle \\ = 2n \frac{g^2}{32\pi^2} \int d^4x \langle \theta | T \tilde{G}(x) G(x) \prod_j N_j(x_j) | \theta \rangle - (\sum_l \chi_l) \langle \theta | T \prod_j N_j(x_j) | \theta \rangle. \end{aligned} \quad (38.10)$$

¹⁾ Более строгий вывод можно найти в работе [81]; в § 45 приведено альтернативное рассмотрение.

Здесь следует сделать два замечания. Очевидно, что справедливо равенство

$$\begin{aligned} & \int d^4x \partial_\mu \langle \theta | T \sum_f \bar{q}_f(x) \gamma^\mu \gamma_5 q_f(x) \prod N_j(x_j) | \theta \rangle \\ &= - \lim_{q \rightarrow 0} i q_\mu \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle \theta | T \sum_f \bar{q}_f(x) \gamma^\mu \gamma_5 q_f(x) \prod N_j(x_j) | \theta \rangle. \end{aligned}$$

Но если не существует $U(1)$ -бозонов, то это вакуумное среднее не имеет полюса в точке $q^2 = 0$, поэтому результат обращается в нуль. Далее, как было показано выше, введение в формулу оператора топологического заряда Q_K эквивалентно применению оператора дифференцирования $i \partial / \partial \theta$. Таким образом, выражение (38.10) принимает вид

$$2ni \frac{\partial}{\partial \theta} \langle \theta | T \prod N_j(x_j) | \theta \rangle = \left(\sum \chi_i \right) \langle \theta | T \prod N_j(x_j) | \theta \rangle. \quad (38.11)$$

Для случая безмассовых кварков вакуум инвариантен относительно киральных вращений:

$$| \theta \rangle = U_\phi | \theta \rangle, \quad U_\phi = e^{-i\phi \hat{Q}_0}; \quad (38.12)$$

с другой стороны, используя формулу (37.106), получаем

$$i \frac{\partial}{\partial \phi} U_\phi^{-1} \prod N_j U_\phi = \left(\sum \chi_i \right) U_\phi^{-1} \prod N_j U_\phi; \quad (38.13)$$

поэтому правую часть уравнения (38.11) можно переписать в виде

$$i \frac{\partial}{\partial \phi} \langle \theta | T \prod N_j(x_j) | \theta \rangle.$$

Таким образом, видно, что под действием оператора

$$2ni \frac{\partial}{\partial \theta} - i \frac{\partial}{\partial \phi}$$

все функции Грина обращаются в нуль. Это означает, что изменение значения параметра θ может быть скомпенсировано изменением фазы ϕ . Следовательно, теория θ -вакуума эквивалентна теории с $\theta = 0$, а последняя, очевидно, обладает инвариантностью относительно киральных преобразований. Таким образом, в частном случае безмассовых кварков¹⁾ параметр θ можно выбрать

¹⁾ Более детальный анализ показывает, что достаточно, чтобы безмассовым был хотя бы один кварк. Этот результат впервые получен в работе [217].

равным нулю; тогда используемое нами выражение (38.1) для лагранжиана квантовой хромодинамики представляет собой в действительности выражение наиболее общего вида.

Можно предположить, что кварки приобретают массу в результате слабых взаимодействий посредством механизма Хиггса, и следует допустить, что в "чистой" квантовой хромодинамике кварки безмассовы. Но нас интересует реальный физический мир, и, таким образом, нельзя избежать (по крайней мере в первом порядке теории возмущений) эффектов, обусловленных слабыми взаимодействиями и нарушающих исходные чисто квантовохромодинамические уравнения¹⁾.

Другое возможное предположение связано с тем, что член $\mathcal{L}_{1\theta}$ нарушает инвариантность по отношению к обращению времени и P -инвариантность. Таким образом, потребовав сохранения P - и T -инвариантности, мы можем положить значение параметра θ равным нулю. Но принять такую точку зрения также невозможно, потому что слабые взаимодействия нарушают T - и P -инвариантность и связанные с этим эффекты могут проявиться в процессах сильного взаимодействия. Если в этом состоит причина возникновения ненулевого значения параметра θ , то имеются довольно веские аргументы [108] в пользу того, что этот эффект мал при условии, что исходное значение параметра θ_{QCD} равно нулю.

Возможно, полезнее обсудить экспериментальные ограничения на значения параметра θ . Как показано в § 45, эффекты, связанные с лагранжианом $\mathcal{L}_{1\theta}$, в процессах типа глубоконеупругого рассеяния оказываются пренебрежимо малыми. Единственным источником, из которого можно получить информацию о значении параметра θ , являются процессы, нарушающие P - и T -инвариантность. При этом наиболее информативной величиной является дипольный момент нейтрона d_n . Вычисления d_n были выполнены в работе [83], в которой были уточнены оценки, данные ранее в статье [21]. Получено значение

$$d_n \approx 4 \times 10^{-16} |\theta| \quad (\text{in } e - \text{cm}).$$

(в единицах $e \cdot \text{cm}$), в то время как экспериментальное ограничение на дипольный момент нейтрона составляет

$$d_n^{\text{exp}} < 1.6 \times 10^{-24},$$

откуда получаем $|\theta| \leq 10^{-8}$, т.е. очень малое значение.

¹⁾ Другая возможность состоит в использовании подходящих хиггсовских систем, обеспечивающих нулевое значение θ [217]. Можно показать, что это приводит к существованию новых псевдоскалярных бозонов ("аксионов", см. [261, 267]). Но нет достаточных данных, чтобы решить, существуют ли они в природе.

Вернемся к рассмотрению проблемы вакуума. Эффекты, обусловленные наличием безмассовых кварков, мы уже обсудили. Теперь необходимо изучить следствия, к которым приводят нарушающие киральную инвариантность "малые" массовые члены. Например, что произойдет, по крайней мере в первом порядке теории возмущений по параметру ϵ (напомним, что массы кварков выражаются в виде $m_f = \epsilon r_f$, где коэффициент r_f постоянен), при введении в лагранжиан возмущающего члена

$$\sum m_f \bar{q}_f q_f.$$

Мы здесь не будем вдаваться в детальный анализ (заинтересованному читателю рекомендуется обратиться к лекциям [82]), а просто приведем основные результаты. Рассмотрим неравенство

$$m_u^{-1} > \sum_{f=2}^n m_f^{-1}; \quad (38.14)$$

отметим, что из результатов, полученных в § 31, следует, что оно, вероятно, выполняется в реальном мире. Тогда: 1) если неравенство (38.14) справедливо, то топологический заряд квантуется и приобретает только целочисленные значения (например, разность ν между двумя собственными значениями операторов K_+ и K_- представляет собой целое число); 2) если неравенство (38.14) *несправедливо*, то по меньшей мере существуют дробные значения величины ν . На самом деле для некоторых частных значений масс параметр ν должен принимать иррациональные значения.

Завершим этот параграф двумя замечаниями. Во-первых, мы получили ограничения на спектр операторов K_{\pm} и выражение для вакуума в терминах собственных векторов этих операторов $|n_{\pm}\rangle$, но мы не доказали, что спектр этих операторов нетривиален. Действительно, можно представить себе, что все собственные значения n совпадают между собой; тогда о содержании этого параграфа можно сказать: "много шума из ничего". В счастье (или к сожалению, в зависимости от точки зрения), наличие инстантонов свидетельствует о существовании по крайней мере бесконечного счетного множества $\dots, -1, 0, 1, 2, \dots$ различных значений параметра n . Это будет показано в § 45.

Во-вторых, мы предположили, что безмассовые $U(1)$ -бозоны не существуют. Массы псевдоскалярных мезонов можно оценить так же, как это сделано в § 31. Если повторить вычисления для синглетного тока A_9^{μ} , то получим, что вследствие аномалии уравнение (31.5) приобретет дополнительный член

$$n_f^2 \left(\frac{g^2}{32\pi^2} \right)^2 \int d^4x \langle TG(x) \tilde{G}(x) G(0) \tilde{G}(0) \rangle_{\text{vac}}. \quad (38.15)$$

Если рассматривать вакуум теории возмущений, то этот член обращается в нуль, однако, как будет показано в § 43 — 45, наличие инстантонных решений, по крайней мере в квазиклассическом приближении, приводит в киральном пределе к ненулевому значению выражения (38.15) [252]. Можно поставить вопрос о справедливости такого приближения. С другой стороны, тот же результат получается в пределе больших чисел цветов [273]. Таким образом, хотя абсолютно строгого доказательства нет, но кажется чрезвычайно вероятным, что квантовая хромодинамика решает проблему $U(1)$.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ; РЕШЕНИЯ, НЕ ОПИСЫВАЕМЫЕ ТЕОРИЕЙ ВОЗМУЩЕНИЙ

§ 39. Формулировка теории поля на языке интегралов по траекториям

До сих пор мы рассматривали главным образом те аспекты квантовой хромодинамики, которые описываются теорией возмущений. При этом вопрос о том, использовать ли каноническую формулировку теории поля или формулировку, основанную на применении интегралов по траекториям, является в значительной мере делом вкуса. Однако при рассмотрении аспектов КХД, не описываемых теорией возмущений, большей ясности можно достигнуть, используя язык функциональных интегралов. В этом параграфе мы рассмотрим кратко формализм фейнмановских интегралов по траекториям, в частности в применении к теории поля. Конечно, это не может заменить подробного изложения метода функциональных интегралов, которое заинтересованный читатель может найти в лекциях [112, 189] или в учебниках [114, 172, 283].

Начнем с рассмотрения нерелятивистской квантовой механики в одномерном пространстве [121]. Имеется гамильтониан \hat{H} , являющийся функцией обобщенных импульсов \hat{P} и координат \hat{Q} . Предполагается, что гамильтониан записан в "нормальной форме", т.е. все операторы импульса \hat{P} расположены левее всех операторов координат \hat{Q} . Классический гамильтониан H можно получить из соотношения

$$\langle p | \hat{H} | q \rangle = \frac{e^{-ipq}}{\sqrt{2\pi}} H(p, q), \quad (39.1)$$

где состояния $|p\rangle$ и $|q\rangle$ удовлетворяют условиям $\hat{P}|p\rangle = p|p\rangle$, $\hat{Q}|q\rangle = q|q\rangle$, $\langle p|q\rangle = e^{-ipq}/\sqrt{2\pi}$. Оценим матричные элементы оператора эволюции

$$\langle q'' | e^{-i(t''-t')\hat{H}} | q' \rangle. \quad (39.2)$$

Для этого запишем разложение оператора эволюции в ряд

$$e^{-i\hat{H}t} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{it}{N} \hat{H} \right)^N, \quad t = t'' - t',$$

и вставим суммы по полным наборам векторов состояний

$$\begin{aligned} \langle q'' | e^{-i\hat{H}} | q' \rangle &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod \frac{dp_n}{2\pi} \prod \frac{dq_n}{2\pi} \langle q'' | p_N \rangle \langle p_N | 1 - \frac{it}{N} \hat{H} | q_N \rangle \\ &\quad \times \langle q_N | p_{N-1} \rangle \langle p_{N-1} | 1 - \frac{it}{N} \hat{H} | q_{N-1} \rangle \cdots \langle p_1 | 1 - \frac{it}{N} \hat{H} | q' \rangle. \end{aligned}$$

Используя соотношение (39.1), получим

$$\langle p_n | 1 - \frac{it}{N} \hat{H} | q_n \rangle = \frac{\exp\{-ip_n q_n - (it/N)H(p_n, q_n)\}}{\sqrt{2\pi}} + O\left(\frac{1}{N^2}\right),$$

так что окончательный результат имеет вид

$$\begin{aligned} \langle q'' | e^{-i\hat{H}} | q' \rangle &= \lim_N \int \prod \frac{dp_n}{2\pi} \prod dq_n \\ &\quad \times \exp i \left\{ p_N(q'' - q_N) + \cdots + p_1(q_1 - q') \right. \\ &\quad \left. - \frac{t}{N} (H(p_N, q_N) \cdots H(p_1, q')) \right\}. \end{aligned} \quad (39.3)$$

Использованный Фейнманом прием заключается во введении в рассмотрение двух функций $p(t)$ и $q(t)$, определяемых условиями $p(t_n) = p_n$ и $q(t_n) = q_n$. Используя эти функции, можно перейти от интегралов по дискретным переменным к интегралам по непрерывным распределениям:

$$\prod_n \frac{dp_n}{2\pi} \rightarrow \prod_t \frac{dp(t)}{2\pi}, \quad \prod_n \frac{dq_n}{2\pi} \rightarrow \prod_t \frac{dq(t)}{2\pi}, \quad (39.4)$$

т.е. теперь интегрирование производится по всем *функциям*, а член в скобках в (39.3) принимает вид

$$\int_{t'}^{t''} dt \{ p(t) \dot{q}(t) - H(p(t), q(t)) \}, \quad \dot{f} \equiv \frac{df}{dt}.$$

Тогда полное выражение (39.3) имеет вид

$$\langle q'' | e^{-i\hat{H}} | q' \rangle = \int \prod_t \frac{dq(t) dp(t)}{2\pi} \exp i \int_{t', q'}^{t'', q''} dt (p \dot{q} - H). \quad (39.5)$$

Конечно, это выражение написано формально¹⁾ и имеет смысл только как предел выражения (39.3), но в этом отношении оно не очень сильно отличается от

¹⁾ Строгое определение функциональных интегралов типа (39.5) см. в работе [264].

стандартного римановского определения обычного интеграла. Важная особенность выражения (39.5) состоит в том, что в него входят только классические c -числовые функции. Таким образом, сложные операторные вычисления мы свели к вычислениям функциональных интегралов.

Выражение (39.5) можно упростить. Если гамильтониан H имеет вид $H = p^2 / (2m) + V(q)$, то интеграл по импульсам dp оказывается гауссовым, и его можно вычислить точно. Производя замену переменной $p \rightarrow p - m\dot{q}$, получаем

$$\begin{aligned} & \int \prod_i \frac{dp(t)}{2\pi} \exp i \int dt \left(p\dot{q} - \frac{p^2}{2m} \right) \\ &= \int \prod_i \frac{dp(t)}{2\pi} \exp \left(-i \int dt \frac{p^2(t)}{2m} \right) \exp \left(i \int dt \frac{m\dot{q}^2(t)}{2} \right); \end{aligned}$$

следовательно, выполняя интегрирование, находим

$$\langle q'' | e^{-i(t''-t')\hat{H}} | q' \rangle = N \int \prod_i dq(t) \exp i \int_{q',t'}^{q'',t''} dt L[q(t), \dot{q}(t)]. \quad (39.6)$$

При этом разность $m\dot{q}^2 - V$ отождествляется с лагранжианом L , и вводится нормировочный множитель N , не зависящий от динамики взаимодействий:

$$N = \int \prod_i \frac{dp(t)}{2\pi} \exp \left\{ -i \int dt \frac{p^2(t)}{2m} \right\}.$$

Обобщение выражения (39.6) на случай нескольких степеней свободы очевидно. Будем использовать обозначение $q(t, k)$ вместо обозначения $q_k(t)$, $k = 1, \dots, n$, имея в виду применение полученных формул в теории поля, где число степеней свободы бесконечно. Лагранжиан L (плотность лагранжевой функции) определим формулой $L = \sum_k \mathcal{L}$. Используя введенные обозначения, получим

$$\begin{aligned} & \langle q'' | e^{-i(t''-t')\hat{H}} | q' \rangle \\ &= N \int \prod_{i,k} dq(t, k) \exp \left\{ i \int_{q',t'}^{q'',t''} dt \sum_k \mathcal{L}[q(t, k); \dot{q}(t, k)] \right\}. \end{aligned} \quad (39.7)$$

Это выражение непосредственно обобщается на случай теории поля. Рассмотрим для простоты одно поле ϕ ; роль переменной k здесь играет пространственная координата \vec{x} . Если выбрать состояние $|\phi(t, \vec{x})\rangle$ так, чтобы выполнялось условие

$$\hat{\phi}(x)|\phi(x)\rangle = \phi(x)|\phi(x)\rangle,$$

то для таких состояний справедливо соотношение

$$\langle \phi(t'', \vec{x}) | e^{-i(t''-t')\hat{H}} | \phi(t', \vec{x}') \rangle = N \int \prod_x d\phi(x) \exp \left\{ i \int_{t'}^{t''} d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial\phi) \right\}. \quad (39.8)$$

Конечно, как и в случае обычной квантовой механики, функциональный интеграл следует понимать как некоторую предельную процедуру. Рассмотрим объем четырехмерного пространства V и разобьем его на конечное число n ячеек. Пусть точки x_j , $j = 1, \dots, n$, лежат внутри j -й ячейки, каждая из которых имеет четырехмерный объем δ . Тогда правая часть соотношения (39.8) определяется как предел

$$\lim_{\substack{V \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty \\ \delta \rightarrow 0}} \int d\phi(x_1) \dots d\phi(x_n) e^{i\delta \sum_j \mathcal{L}[\phi(x_j), \partial\phi(x_j)]} \quad (39.9)$$

(ниже мы увидим, что нормировочный множитель N из формул для амплитуд переходов выпадает). Для получения матричных элементов S -матрицы или функций Грина требуется вычислить вакуумные средние $\langle T\phi(x) \dots \phi(z) \rangle_0$. Для этого рассмотрим амплитуду перехода вакуум — вакуум

$$\langle 0 | \hat{S} | 0 \rangle = \lim_{\substack{t' \rightarrow -\infty \\ t'' \rightarrow +\infty}} \langle 0 | e^{-i(t''-t')\hat{H}} | 0 \rangle;$$

введя источники, получим функции Грина. Согласно формуле (39.7), справедливо равенство

$$\langle 0 | \hat{S} | 0 \rangle = N \int \prod_x d\phi(x) \exp i\mathcal{A}, \quad \mathcal{A} = \int d^4x \mathcal{L}; \quad (39.10)$$

здесь \mathcal{A} — действие. Добавим к лагранжиану \mathcal{L} член, содержащий источник:

$$\mathcal{L}_\eta = \mathcal{L} + \eta(x)\phi(x), \quad \mathcal{A}_\eta = \int d^4x \mathcal{L}_\eta,$$

и определим производящий функционал

$$Z[\eta] = N \int \prod_x d\phi(x) \exp i\mathcal{A}_\eta. \quad (39.11)$$

В дальнейшем будет показана справедливость соотношения

$$\frac{\delta^n \log Z[\eta]}{\delta\eta(x_1) \dots \delta\eta(x_n)} \bigg|_{\eta=0} = \frac{i^n \langle T\hat{\phi}(x_1) \dots \hat{\phi}(x_n) \rangle_0}{\langle \hat{S} \rangle_0}, \quad (39.12)$$

где правая часть представляет собой *связанную функцию Грина*, которую до сих пор мы обозначали как

$$\langle T\hat{\phi}(x_1) \dots \hat{\phi}(x_n) \rangle_0,$$

включая фазу $\langle \hat{S} \rangle_0$ в определение физической \hat{S} -матрицы. Мы докажем соотношение (39.12) для случая свободных полей (вывод с учетом взаимодействия приводится несколько ниже). Соответствующий лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 = -\frac{1}{2} \phi (\partial^2 + m^2) \phi + 4\text{-дивергенция}.$$

Технический прием состоит в приведении интеграла к гауссовой форме. С этой целью определим поле ϕ' формулой

$$\phi'(x) = (\partial^2 + m^2)^{1/2} \phi(x),$$

которая справедлива при условии

$$\phi'(x) = \int d^4x K^{-1/2}(x-y) \phi(y),$$

$$K(z) = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{e^{ik \cdot z}}{(k^2 - m^2 + i0)} = i\Delta(z). \quad (39.13)$$

Правило обхода полюса, задаваемое добавкой $+i0$, гарантирует получение хронологических произведений. Тогда для производящего функционала получаем

$$Z[\eta] = N \int \prod_x d\phi'(x) \det(\partial\phi/\partial\phi') \times \exp i \int d^4x \left\{ \frac{-1}{2} \phi'(x) \phi'(x) + \int d^4y \eta(x) K^{1/2}(x-y) \phi'(y) \right\};$$

здесь $\det(\partial\phi/\partial\phi')$ — якобиан перехода (бесконечномерный) от переменной ϕ к переменной ϕ' . Последний шаг состоит в замене переменной интегрирования:

$$\phi'(x) = \phi''(x) + \int d^4y K^{1/2}(x-y) \eta(y).$$

Таким образом, окончательный результат имеет вид

$$Z[\eta] = \left\{ N \int \prod_x d\phi''(x) \det(\partial\phi/\partial\phi'') e^{-i \int d^4x \phi''^2/2} \right\} \times e^{(i^2/2) \int d^4x d^4y \eta(x) \Delta(x-y) \eta(y)}, \quad (39.14)$$

где $\Delta(x-y)$ — пропагатор поля:

$$\Delta(x) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{e^{-ik \cdot x}}{k^2 - m^2 + i0} = \langle T\phi(x)\phi(0) \rangle_0.$$

Член в фигурных скобках в правой части (39.14) не зависит от величины источника η ; следовательно, при взятии логарифмической производной он сократится. Поэтому для производящего функционала можно написать выражение

$$Z[\eta] = \bar{N} \exp \left\{ \frac{i^2}{2} \int d^4x d^4y \eta(x) \Delta(x-y) \eta(y) \right\}, \quad (39.15)$$

из которого непосредственно получается соотношение (39.12).

Введение в рассмотрение векторных полей не вносит каких-либо трудностей; точно так же, как и в предыдущем случае, операторные вставки связаны с введением внешних источников (пример приведен в § 42). Но включение фермионных полей требует некоторых усложнений. При этом возникает необходимость во введении на классическом уровне *антикоммутирующих c-числовых величин*¹⁾, определяемых соотношениями

$$\psi(x)\psi(y) = -\psi(y)\psi(x), \quad [\psi(x)]^2 = 0.$$

Функционал (классических) фермионных полей в общем виде определяется выражением

$$F[\psi] = K_0 + \int dx_1 K_1(x_1) \psi(x_1) + \dots \\ + \int dx_1 \dots dx_n K_n(x_1, \dots, x_n) \psi(x_1) \dots \psi(x_n) + \dots,$$

где K_1 — антикоммутирующая функция, а функции K_n при $n \geq 2$ можно считать полностью антисимметричными по своим аргументам. Из определения функциональной производной

$$\frac{\delta F[\psi]}{\delta \psi(x)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F[\psi + \epsilon \delta_x] - F[\psi]}{\epsilon},$$

где ϵ — антикоммутирующее c-число, удовлетворяющее условиям

$$\epsilon\psi = -\psi\epsilon, \quad \epsilon^2 = 0,$$

¹⁾ В математической литературе такая структура называется *гассмановой алгеброй*. Подробное изложение этого вопроса можно найти в книге [37].

следует справедливость равенства

$$\frac{\delta^n F[\psi]}{\delta\psi(x_n) \dots \delta\psi(x_1)} \Big|_{\psi=0} = n! K_n(x_1, \dots, x_n).$$

Отметим обратный порядок следования переменных x в левой части равенства. Это вызвано антикоммутативностью полей ψ , в силу которой

$$\frac{\delta^2}{\delta\psi_1 \delta\psi_2} = - \frac{\delta^2}{\delta\psi_2 \delta\psi_1}.$$

Интегрирование по антикоммутирующим функциям также обладает рядом особенностей. Чтобы все построения были последовательны, необходимо потребовать выполнения соотношений

$$\int d\psi(x) = 0, \quad \int d\psi(x) \psi(y) = \delta(x-y).$$

Наконец, если мы хотим получить *одночастично-неприводимые* функции Грина, т.е. такие функции Грина, которые остаются связанными при рассеении их по одной внутренней линии, мы должны взять функциональную производную не по функции η , а по новому полю $\bar{\phi}$ от нового производящего функционала $\Gamma[\bar{\phi}]$:

$$\Gamma[\bar{\phi}] = \frac{1}{i} \log Z[\eta] - \int d^4x \eta(x) \bar{\phi}(x), \quad (39.16a)$$

$$\bar{\phi}(x) \equiv \frac{-i \delta \log Z[\eta]}{\delta \eta(x)}. \quad (39.16b)$$

Отметим, что поле $\bar{\phi}$ представляет собой вакуумное среднее оператора $\hat{\phi}$.

Доказательство того, что величина Γ порождает одночастично-неприводимые функции Грина, очевидно из тождества, к доказательству которого мы переходим. Проинтегрировав дважды новый производящий функционал $\Gamma(\bar{\phi})$, получаем

$$\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \bar{\phi}(x) \delta \bar{\phi}(y)} = - \frac{\delta \eta(x)}{\delta \bar{\phi}(y)} = \left[- \frac{\delta \bar{\phi}(y)}{\delta \eta(x)} \right]^{-1} = -i \Delta^{-1}(x-y),$$

откуда, в частности, следует равенство $\Delta \{ \delta^2 \Gamma / [\delta \bar{\phi}(x) \delta \bar{\phi}(y)] \} \Delta = i \Delta$; с точностью до коэффициента i пропагатор Δ оказывается равным одночастично-неприводимой функции Грина в обкладках из пропагаторов. В более общем виде имеем соотношение

$$\frac{\delta}{\delta \bar{\phi}} = \left[\frac{\delta \eta}{\delta \bar{\phi}} \right] \frac{\delta}{\delta \eta} = -i \Delta^{-1}(x-y) \frac{\delta}{\delta \eta}, \quad (39.17)$$

которое требовалось найти.

§ 40. Приближение ВКБ в формализме интегралов по траекториям; туннелирование

В обычной квантовой механике приближение ВКБ состоит в разложении рассматриваемых величин по степеням постоянной Планка \hbar . В нулевом порядке получаются классические траектории; члены высших порядков по \hbar описывают квантовые поправки к классическим решениям. В теории поля приближение ВКБ особенно удобно формулировать на языке интегралов по траекториям. Чтобы использовать метод ВКБ, мы теперь не будем полагать постоянную Планка равной единице, а сохраним ее в явном виде в выражении для производящего функционала (39.11):

$$Z[\eta] = \int \prod_x d\phi(x) \exp \frac{i}{\hbar} \mathcal{A}_\eta[\phi], \quad (40.1)$$

поля же и импульсы представим в виде рядов

$$\phi(x) = \phi_{cl}(x) + \hbar^{1/2} \tilde{\phi}(x) + \dots, \quad \pi(x) = \partial_0 \phi_{cl}(x) + \hbar^{1/2} \tilde{\pi}(x) + \dots, \quad (40.2)$$

и сравним коэффициенты при одинаковых степенях постоянной Планка \hbar . Член ϕ_{cl} представляет собой решение *классического* уравнения движения

$$\partial^2 \phi_{cl} + m^2 \phi_{cl} = \frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial \phi} \Big|_{\phi = \phi_{cl}}, \quad (40.3a)$$

или, что эквивалентно, имеет вид

$$\phi_{cl}(x) = \phi_0(x) + i \int d^4 y \Delta(x-y) \frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial \phi} \Big|_{\phi = \phi_{cl}}, \quad (40.3b)$$

где ϕ_0 — свободное классическое поле, удовлетворяющее однородному уравнению $(\partial^2 + m^2)\phi_0 = 0$. Поскольку поле ϕ_{cl} удовлетворяет уравнению движения, действие $\mathcal{A}[\phi_{cl}]$ достигает на этом поле экстремума: мы разлагаем выражение (40.1) в ряд в окрестности этой стационарной фазы. Нулевой порядок теории возмущений по константе \hbar соответствует древесному приближению; поправки старших порядков описывают вклады различных петлевых диаграмм. Применимость этого метода основана на том, что в каждом порядке теории возмущений возникающие интегралы имеют гауссову форму и, следовательно, могут быть вычислены аналитически. Покажем это на примере вычисления поправки первого порядка. В первом порядке по константе \hbar действие \mathcal{A} имеет вид

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}[\phi_{cl}] - \frac{1}{2} \int d^4 x \left\{ \tilde{\phi}(x) (\partial^2 + m^2) \tilde{\phi}(x) - \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{int}(\phi)}{\partial \phi^2} \Big|_{\phi = \phi_{cl}} \tilde{\phi}(x) \tilde{\phi}(x) \right\}.$$

Проведем замену переменной

$$\tilde{\phi}(x) \rightarrow \phi'(x) = \left\{ \partial^2 + m^2 - \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{\text{int}}}{\partial \phi^2} \right\}^{1/2} \tilde{\phi}(x),$$

и для производящего функционала получим следующий результат:

$$Z = (\text{constant}) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{Tr} \log \left[1 - (\partial^2 + m^2)^{-1} \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{\text{int}}}{\partial \phi^2} \right]_{\phi=\phi_{\text{cl}}} \right\} Z_{\text{tree}}, \quad (40.4a)$$

где, используя (40.3) и соотношение $i(\partial^2 + m)\Delta(x) = \delta(x)$, производящий функционал древесного приближения Z_{tree} можно записать в виде

$$Z_{\text{tree}} = N \exp \frac{i}{\hbar} \left\{ \int d^4x \mathcal{L}_{\text{int}}(\phi_{\text{cl}}) - \frac{i}{2} \int d^4x d^4y \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{int}}}{\partial \phi(x)} \Big|_{\phi=\phi_{\text{cl}}} \times \Delta(x-y) \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{int}}}{\partial \phi(y)} \Big|_{\phi=\phi_{\text{cl}}} \right\}. \quad (40.4b)$$

Константа в формуле (40.4a) содержит член

$$\int \prod d\phi'(x) e^{-(i/2) \int dx \phi'^2(x)} \det(\partial^2 + m^2)^{1/2},$$

где использовано обозначение

$$\det(A^{-1/2}) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{Tr} \log A \right\}.$$

Известно, что существуют такие квантовомеханические состояния системы, для которых классических траекторий не существует. Такая ситуация имеет место, например, при туннелировании через потенциальный барьер. Но метод приближения ВКБ можно распространить и на этот случай. Продемонстрируем это на типичном примере частицы, совершающей в одномерном пространстве движение в потенциале $V(x)$. Волновая функция такой частицы в приближении ВКБ имеет вид (см., например, [186])

$$\psi(x) = C e^{i\mathcal{A}(x)}, \quad (40.5)$$

где \mathcal{A} — действие, вычисленное вдоль классической траектории, определяемой уравнением

$$\frac{1}{2} m \ddot{x} + V(x) = E. \quad (40.6)$$

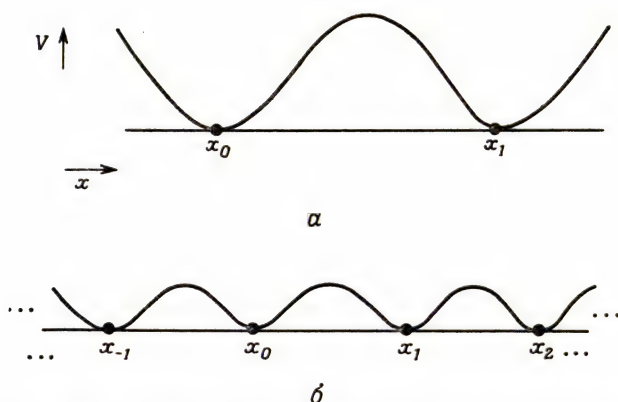


Рис. 30. Потенциалы с несколькими минимумами: а — потенциал с двумя минимумами; б — периодический потенциал.

Выберем потенциал, имеющий два минимума в точках $x = x_0$ и x_1 и обращающийся в этих точках в нуль (рис. 30, а). Если выполняется условие $E > \max V$, движение из точки x_0 в точку x_1 разрешено, и, исходя из выражения (40.5), для волновой функции ψ можно вычислить амплитуду "рассеяния". Но если выполняется условие $E < \max V$, корректное ВКБ-рассмотрение приводит к результату, согласно которому амплитуда перехода

$$\langle x_1 | x_0 \rangle = C e^{i\mathcal{A}(x_1, x_0)}. \quad (40.7)$$

должна быть заменена *амплитудой туннелирования*

$$\langle x_1 | x_0 \rangle = C e^{-\mathcal{A}(x_1, x_0)}, \quad (40.8)$$

где действие \mathcal{A} вычисляется не вдоль траекторий, определяемых уравнением (40.6), а вдоль траекторий, удовлетворяющих уравнению

$$-\frac{1}{2}m\ddot{x} + V(x) = E. \quad (40.9)$$

Мы видим, что для получения амплитуды туннелирования можно использовать ту же формулу, что и для амплитуды перехода, производя лишь формальную замену переменной t на it как в выражении для действия

$$\mathcal{A} = \int_{t(x_0)}^{t(x_1)} dt L \rightarrow i\mathcal{A}$$

так и в уравнениях движения (40.6) — (40.9).

Выражения (40.5) и (40.8) не нормированы. Но их легко нормировать, разделив на амплитуду $\langle x_0 | x_0 \rangle$. Таким образом, можно заключить, что в кван-

товой теории поля амплитуда туннелирования в ведущем приближении выражается в виде

$$\langle \Psi_1, t = +\infty | \Psi_0, t = -\infty \rangle \approx C \exp \left\{ - \int d^4 x \mathcal{L}(\phi_{cl}) \right\}, \quad (40.10)$$

где ϕ_{cl} — классическое решение евклидовых уравнений движения, т.е. уравнений движения, в которых проведена замена $x_0 \rightarrow i x_4$, где переменная x_4 вещественна.

Согласно обсуждению, проведенному в начале данного параграфа, выражение (40.10) можно рассматривать как ведущий член разложения точного выражения

$$\langle \Psi_1, t = +\infty | \Psi_0, t = -\infty \rangle = N \exp \left\{ - \int d^4 x \mathcal{L}(\phi) \right\} \quad (40.11)$$

по степеням постоянной Планка \hbar в окрестности классической траектории

ϕ_{cl} .

Важное свойство состояний системы, находящейся в условиях, когда возможно туннелирование, заключается в следующем. В стационарных состояниях (в частности, в основном состоянии, которое должно быть отождествлено с вакуумом теории поля) система не локализована в одном из минимумов потенциала V , а распределяется между всеми минимумами. В случае КХД это будет показано на примере периодического потенциала, подобного потенциалу рис. 30, б.

§ 41. Формализм функциональных интегралов в квантовой хромодинамике; калибровочная инвариантность

Формализм, развитый в предыдущих параграфах, можно непосредственно применить к квантовой хромодинамике, если сначала рассмотреть вопрос о калибровочной инвариантности. Одна из возможностей состоит в том, чтобы выбрать физическую калибровку

$$u \cdot B_a(x) = 0, \quad u^2 \leq 0, \quad (41.1)$$

так что интегрирование в функциональном интеграле производится по полям B , удовлетворяющим условию (41.1). Теперь производящий функционал с точностью до произвольного нормировочного множителя N определяется в виде

$$Z = N \int (dq) (d\bar{q}) (dB) \prod_{a,x} \delta(u \cdot B_a(x)) \exp i \int d^4 x \mathcal{L}_u, \quad (41.2)$$

где введены часто употребляемые в дальнейшем обозначения

$(dq) \equiv \Pi_{x, f, i, \alpha} dq_{f\alpha}^i(x)$, $(dB) \equiv \Pi_{x, \mu, a} dB_a^\mu(x)$ и т.д., а \mathcal{L}_u — лагранжиан КХД, не содержащий членов, фиксирующих калибровку. Это все, что требуется, если мы хотим работать в физической калибровке. Но хотелось бы также распространить формализм функциональных интегралов и на другие типы калибровок, в частности на ковариантные калибровки. Калибровочные условия можно записать в виде

$$K_a[B(x)] = 0, \quad (41.3)$$

где K — функционал, фиксирующий калибровку. Например, лоренцева калибровка имеет вид

$$K_a[B(x)] = \partial_\mu B_a^\mu(x) - \phi_a(x), \quad (41.4)$$

где поле ϕ представляет собой заданную функцию (в частности, можно взять $\phi = 0$).

Пусть $T(\theta)$ — калибровочное преобразование, задаваемое параметрами $\theta(x)$, а B_T — поля, возникающие из полей B под действием этого калибровочного преобразования:

$$B_{Ta}^\mu(x) = B_a^\mu(x) + g \sum f_{abc} \theta_b(x) B_c^\mu(x) - \partial^\mu \theta_a(x)$$

(ср. с § 3). Величина

$$\Delta_K^{-1}[B] = \int \prod_{x,a} d\theta_a(x) \prod_{x,a} \delta(K_a[B_T(x)]) \quad (41.5)$$

при калибровочных преобразованиях не изменяется:

$$\Delta_K^{-1}[B_T] = \Delta_K^{-1}[B].$$

Для доказательства этого утверждения достаточно показать, что элемент интегрирования $\Pi_{x,a} d\theta_a(x)$ является калибровочно-инвариантной величиной. В случае инфинитезимальных преобразований (которые только и нужны) это очевидно, так как

$$T(\theta)T(\theta') = T(\theta + \theta').$$

Забудем на время о существовании кварков, роль которых при калибровочных преобразованиях вполне ясна. Выражение (41.2) можно переписать в виде

$$Z = N \int (dB)(d\theta) \prod \delta(u \cdot B_a(x)) \prod \delta(K_b[B_T]) \Delta_K[B_T] e^{i\mathcal{A}_{YM}}, \quad (41.6)$$

где чисто янг-миллсовское действие

$$\mathcal{A}_{YM} = -\frac{1}{4} \int d^4x \sum G_{a\mu\nu}(x) G_a^{\mu\nu}(x).$$

Предположим, что в выражении (41.6) производится замена переменной, вызванная калибровочным преобразованием вида

$$B(x) \rightarrow B_{T_0}(x),$$

где преобразование T_0 выбрано равным T^{-1} . При такой замене переменных получаем

$$Z = N \int (dB)(d\theta) \Delta_K[B] \prod \delta(u \cdot B_{T_0 a}(y)) \prod \delta(K[B(y)]) e^{i\mathcal{A}_{YM}}.$$

Пусть поля B_u являются глюонными полями, удовлетворяющими условию (41.1). Поле B_{T_0} можно найти, производя калибровочное преобразование $U(\theta_u)$. Тогда имеем

$$\delta(u \cdot B_{T_0}) = \delta(u \cdot B_{uU}),$$

и, таким образом, выполняется соотношение

$$\int (d\theta) \prod \delta(u \cdot B_{T_0 a}(y)) = \int (d\theta) \prod \delta(-u \cdot \partial^\mu \theta_{ua}(y)),$$

которое не зависит от значений полей B и, следовательно, может быть включено в нормировочный множитель N . Для производящего функционала получаем

$$Z = N' \int (dB) \Delta_K[B] \prod \delta(K[B]) e^{i\mathcal{A}_{YM}}. \quad (41.7)$$

Теперь необходимо устранить δ -функцию и вычислить множитель Δ_K . Для устранения δ -функции выберем, например, лоренцеву калибровку (41.4); интегрируя выражение (41.7) по $d\phi$ с весом

$$\exp \left\{ \frac{-i\lambda}{2} \int d^4x [\phi_a(x)]^2 \right\},$$

в левой части получаем производящий функционал Z , умноженный на не зависящий от полей B фактор

$$\int (d\phi) \exp \left\{ \frac{-i\lambda}{2} \int d^4x [\phi_a(x)]^2 \right\},$$

который снова можно включить в нормировочный множитель N'' , а в правой части интегрирование по полям $d\phi$ тривиально выполняется с помощью δ -функции. Таким образом, для производящего функционала получаем

$$Z = N'' \int (dB) \Delta_K[B] e^{i(\mathcal{A}_{YM} + \mathcal{A}_{GF})}, \quad (41.8)$$

где фиксирующее калибровку действие имеет вид

$$\mathcal{A}_{GF} = \frac{-\lambda}{2} \int d^4x [\partial_\mu B_a^\mu(x)]^2.$$

Обратимся к множителю Δ_K . Благодаря формуле (41.7) нам необходимы только такие функции B , описывающие глюонные поля, которые удовлетворяют условию (41.3). Для инфинитезимальных значений параметров θ калибровочного преобразования имеем $K[B_T] = K[B] + (\delta K/\delta B) \delta B \sim (\delta K/\delta B) \delta B$, $\delta B = B_T - B$, так что

$$\Delta_K^{-1}[B] = \int (d\theta) \Pi \delta \left(\frac{\delta(\partial B_a)}{\delta B_b^\mu} (\partial^\mu \theta_b - g \sum f_{bcd} B_d^\mu \theta_c) \right).$$

Этой формуле можно придать более удобный вид, вводя дѹхи Фаддеева — Попова, представленные антикоммутирующими c -числовыми функциями ω и $\bar{\omega}$. Тогда, выделяя не зависящий от полей B и ω нормировочный множитель N , величину Δ_K можно представить в виде

$$\Delta_K[B] = \bar{N} \int (d\omega) (d\bar{\omega}) \times \exp \left\{ -i \int d^4x d^4y \bar{\omega}_a(y) \frac{\delta(\partial B_a)}{\delta B_b^\mu} [\partial^\mu \omega_b(x) - g \sum f_{bcd} B_d^\mu \omega_c(x)] \right\}. \quad (41.9)$$

Доказательство этого выражения основано на формуле

$$\int \prod_i d\bar{c}_i \prod_j dc_j e^{\sum c_k A_{kk} c_k} = (\text{constant}) \det A,$$

которая справедлива¹⁾ для антикоммутирующих c -чисел c_i , и на том факте,

¹⁾ Для доказательства используем соотношение

$$\int \prod_{i=1}^{N_0} dc_i \prod_{j=1}^{N_0} d\bar{c}_j e^{\sum c_k A_{kk} c_k} = \int \prod_{i=1}^{N_0} dc_i \prod_{j=1}^{N_0} d\bar{c}_j \sum_{N=0}^{\infty} \left\{ \sum c_k c_k A_{kk} \right\}^N \frac{1}{N!}.$$

В силу правил интегрирования по фермионным переменным отличен от нуля только член с $N = N_0$, поэтому получаем

$$\frac{(-1)^{N_0}}{N_0!} \sum \text{sign}(k_1, \dots, k_{N_0}) \text{sign}(k'_1, \dots, k'_{N_0}) A_{k_1 k'_1} \dots A_{k_{N_0} k'_{N_0}},$$

где производится суммирование по всем возможным перестановкам индексов k_1, \dots, k_{N_0} ; k'_1, \dots, k'_{N_0} , каждый из которых пробегает значения $1, 2, \dots, N_0$. Это не что иное, как $(-1)^{N_0} \det(A/N_0!)$. Дополнительный множитель $(-i)$ в экспоненте выражения (41.9) дает вклад только в коэффициент перед формулой; это означает, что фаза фермионного члена произвольна. Мы выберем ее так, чтобы она совпадала с фазой члена, соответствующего обычным скалярным полям.

что вследствие равенства

$$\int dx_1 \dots dx_k \prod_{i=1}^k \delta(f_i(x_1, \dots, x_k)) = \frac{1}{\det(\partial f_i / \partial x_j)},$$

величина Δ_K представляет собой просто определитель (бесконечномерной) матрицы

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{\delta(\partial B_a)}{\delta B_b^\mu} (\partial^\mu \theta_b - g \sum f_{bcd} B_d^\mu \theta_c) \right\}.$$

Осталось сделать последний шаг, чтобы завершить наше рассмотрение. Функциональная производная, входящая в (41.9), имеет вид (см. приложение 3)

$$\frac{\delta(\partial B_a(x))}{\delta B_b^\mu(y)} = \delta_{ab} \partial_\mu \delta(x - y),$$

поэтому оператор дифференцирования ∂_μ можно перенести в левую часть уравнения и провести интегрирование по $d^4 y$. В итоге для производящего функционала получаем

$$Z = \bar{N} \int (dB)(d\omega)(d\bar{\omega}) e^{i(\mathcal{A}_{YM} + \mathcal{A}_{GF} + \mathcal{A}_{FP})}, \quad (41.10a)$$

где действие, соответствующее духам Фаддеева — Попова, имеет вид

$$\mathcal{A}_{FP} = \int d^4 x \sum (\partial_\mu \bar{\omega}_a(x)) [\delta_{ab} \partial^\mu - g f_{abc} B_c^\mu(x)] \omega_b(x), \quad (41.10b)$$

что согласуется с результатом, полученным в § 5.

Чтобы получить функции Грина, необходимо ввести антикоммутирующие источники $\bar{\eta}_a, \eta_a; \bar{\xi}_{if}, \xi_{if}$ для духов $\omega_a, \bar{\omega}_a$ и кварков q_f^i, \bar{q}_f^i соответственно и коммутирующие источники λ_a^μ для глюонных полей B_a^μ . Таким образом, нашей отправной точкой является функционал

$$Z[\eta, \bar{\eta}; \xi, \bar{\xi}; \lambda] = \int (dq)(d\bar{q})(d\omega)(d\bar{\omega})(dB) \exp i \int d^4 x \{ \mathcal{L}_{QCD}^\xi + \mathcal{L}_\lambda \}, \quad (41.11a)$$

где лагранжиан \mathcal{L}_{QCD}^ξ описывается формулой (5.11), а

$$\mathcal{L}_\lambda = \sum \{ \bar{\eta}_a \omega_a + \bar{\omega}_a \eta_a + \bar{\xi}_{if} q_f^i + \bar{q}_f^i \xi_{if} + \lambda_{a\mu} B_a^\mu \}. \quad (41.11b)$$

Формализм функциональных интегралов позволяет ввести чрезвычайно красивый метод, так называемый *метод фоновых полей*¹⁾, который обладает

¹⁾ Этот метод впервые был введен де Виттом и обобщен (в частности, на калибровочные теории) т'Хофтом.

тем преимуществом, что эффективное действие, фигурирующее в этом методе (см. § 39), калибровочно-инвариантно. Это равносильно рассмотрению фиксирующего калибровку условия $K[B] = \Sigma (\partial_\mu B_a^\mu + g \Sigma f_{adc} b_d^\mu B_{c\mu})^2$, где b — классические "фоновые" поля, сдвигающие глюонные поля $B \rightarrow B + b$, и вычислению функциональных производных по полям b . Подробное изложение и ссылки на литературу можно найти в работе [3].

§ 42. Фейнмановские правила диаграммной техники

В § 39 утверждалось, что разложение функций Грина по степеням константы взаимодействия g , возникающее из (41.11), воспроизводит обычные фейнмановские правила диаграммной техники, которые были получены выше на основе разложения полевых операторов по операторам рождения и уничтожения и применения теоремы Вика. Правила Фейнмана можно вывести иначе, исходя из формул (41.11). Покажем это на примере трех типичных величин: глюонного пропагатора, вершины взаимодействия духов и глюонов и несинглетных составных операторов, фигурирующих в формулах процессов глубокоупругого рассеяния.

Для получения глюонного пропагатора рассмотрим соотношение

$$\langle T \hat{B}_a^\mu(x) \hat{B}_b^\nu(y) \rangle_0|_{g=0} = (-i)^2 \frac{\delta^2 \log Z}{\partial \lambda_{a\mu}(x) \partial \lambda_{b\nu}(y)} \bigg|_{\substack{\lambda=0 \\ g=0}} \quad (42.1)$$

Здесь мы снова для обозначения операторов пользуемся символами с "крышками". Повторяя рассуждения § 39 и вводя для калибровочного параметра обозначение $\lambda = a^{-1}$, с точностью до 4-дивергенции можем написать цепочку равенств

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4} \sum [\partial^\rho B_a^\sigma(x) - \partial^\sigma B_a^\rho(x)] [\partial_\rho B_{a\sigma}(x) - \partial_\sigma B_{a\rho}(x)] - \frac{a^{-1}}{2} \sum [\partial_\tau B_a^\tau(x)]^2 \\ & = \frac{1}{2} \sum B_a^\sigma(x) [\partial^2 B_{a\sigma}(x) - (1 - a^{-1}) \partial_\sigma \partial^\rho B_{a\rho}(x)] + \partial_\mu f^\mu \\ & = \frac{1}{2} \sum_{a,b} B_{a\sigma}(x) (K^{-1})_{ab}^{\sigma\rho} B_{b\rho}(x) + \partial_\mu f^\mu, \end{aligned}$$

где множитель K имеет вид

$$(K^{-1})_{ab}^{\sigma\rho} = \delta_{ab} \left\{ g^{\sigma\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - (1 - a^{-1}) \frac{\partial}{\partial x_\sigma} \frac{\partial}{\partial x_\rho} \right\}. \quad (42.2)$$

Полагая теперь источники η , $\bar{\eta}$, ξ , $\bar{\xi}$ и константу взаимодействия g в форму-

лах (41.11) равными нулю, для производящего функционала получаем

$$Z = \int (dq) (d\bar{q}) (d\omega) (d\bar{\omega}) (dB) \times \exp i \int d^4x \left\{ i\bar{q}(x) \partial q(x) + \frac{1}{2} \sum B_{a\sigma}(x) (K^{-1})_{ab}^{\sigma\rho} B_{b\rho}(x) + \sum \lambda_{a\mu}(x) B_a^\mu(x) \right\}. \quad (42.3)$$

Интегралы по переменным q , \bar{q} , ω и $\bar{\omega}$ приводят к константе, которая сокращается при вычислении логарифмической производной. Если провести замену переменной

$$B \rightarrow B' = K^{-1/2} B,$$

то формула (42.3) примет вид

$$Z = (\text{constant}) \int (dB') J(K) \times \exp i \int d^4x \sum \left\{ \frac{1}{2} B'_{a\mu}(x) B_a'^{\mu}(x) + \lambda_{a\mu}(x) (K^{1/2} B')_a^\mu(x) \right\},$$

где $J(K)$ — якобиан преобразования. Наконец, заменим переменную интегрирования

$$B' \rightarrow B'' = B' + K^{1/2} \lambda,$$

так что производящий функционал теперь описывается формулой

$$Z = (\text{constant}) \int (dB'') J(K) \times \exp i \int d^4x \sum \left\{ \frac{1}{2} B''_{a\mu}(x) B_a''^{\mu}(x) - \frac{1}{2} \lambda_{a\mu}(x) (K\lambda)_a^\mu(x) \right\}. \quad (42.4a)$$

Множитель K удобно представить в интегральной форме

$$(Kf)_a^\mu(x) = -i \sum \int d^4y D_{ab}^{\mu\nu}(x-y) f_{b\nu}(y); \quad (42.4b)$$

тогда для логарифмической производной производящего функционала получаем

$$\frac{\delta^2 \log Z}{\delta \lambda_{a\mu}(x) \delta \lambda_{b\nu}(y)} \bigg|_{\substack{\text{sources}=0 \\ g=0}} = -D_{ab}^{\mu\nu}(x-y).$$

Форма пропагатора D следует из его определения. Она такова, что выполняется соотношение

$$\widetilde{(K^{-1}f')}_a^\mu(x) = \sum \delta_{ab} \{ g^{\mu\nu} \partial^2 - (1 - a^{-1}) \partial^\mu \partial^\nu \} f'_{b\nu}(x);$$

поэтому, проводя фурье-преобразование, обозначенное тильдой над соответствующей величиной, получаем

$$(K^{-1}f)_a^\mu(k) = \sum \delta_{ab} \{ -g^{\mu\nu} k^2 + (1 - a^{-1}) k^\mu k^\nu \} \tilde{f}_{b\nu}(k);$$

отсюда, полагая $\widetilde{Kf} = f$, сразу получаем результат

$$(\widetilde{Kf})_a^\mu(k) = \sum \delta_{ab} \frac{-g^{\mu\nu} + (1 - a) k^\mu k^\nu / k^2}{k^2} \tilde{f}_{b\nu}(k).$$

Таким образом, как и ожидалось, пропагатор глюонного поля имеет вид

$$\begin{aligned} \langle T \hat{B}_a^\mu(x) \hat{B}_b^\nu(y) \rangle_{0|g=0} &= D_{ab}^{\mu\nu}(x-y) \\ &= \delta_{ab} \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{-ik \cdot (x-y)} \frac{-g^{\mu\nu} + (1 - a) k^\mu k^\nu / k^2}{k^2}, \\ & \qquad \qquad \qquad a = \lambda^{-1}. \end{aligned} \quad (42.5)$$

Доказательство того, что обход полюсов в выражении (42.5) задается добавкой $+i0$, требует либо рассмотрения асимптотических состояний, либо каких-нибудь других граничных условий на глюонный пропагатор. Эти условия можно найти в работе [112].

Для получения вершины взаимодействия дж'хов с глюонами требуется рассмотреть величину

$$\langle T \hat{\omega}_a(x_1) \hat{\omega}_b(x_2) \hat{B}_c^\mu(x_3) \rangle_0 \left| \begin{array}{l} \text{1-й поря-} \\ \text{док по } g \end{array} \right. = \frac{i \delta^3 \log Z}{\delta \eta_a(x_1) \delta \bar{\eta}_b(x_2) \delta \lambda_{c\mu}(x_3)} \left| \begin{array}{l} \lambda = 0 \\ \text{1-й поря-} \\ \text{док по } g \end{array} \right. \quad (42.6)$$

Обозначим через k оператор Клейна — Гордона, задаваемый соотношением $kf(x) = \partial^2 f(x)$ ¹⁾. Произведем замену переменных $B \rightarrow B' = K^{-1/2} B$, $\omega \rightarrow \omega' = k^{-1/2} \omega$, $\bar{\omega} \rightarrow \bar{\omega}' = k^{-1/2} \bar{\omega}$ и проинтегрируем по кварковым полям, которые в данном рассмотрении не играют роли. Тогда для производящего функционала Z получаем

$$\begin{aligned} Z &= (\text{constant}) \int (d\omega') (d\bar{\omega}') (dB') J(K) J(k) \\ &\times \exp i \int d^4x \sum \left\{ g [\partial_\mu (k^{1/2} \bar{\omega}')_a(x)] f_{abc} (K^{1/2} B')_c^\mu(x) (k^{1/2} \omega')_b(x) \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} B'^2 - \bar{\omega}' \omega + \bar{\eta}_a(x) (k^{1/2} \omega')_a(x) \\ &\quad \left. + (k^{1/2} \bar{\omega}')_a(x) \eta_a(x) + \lambda_a^\mu(x) (K^{1/2} B')_{a\mu}(x) + \dots \right\}, \end{aligned}$$

¹⁾ Обычно этот оператор называется оператором Даламбера. — Прим. перев.

где многоточие обозначает члены, обращающиеся в нуль при $g^2 \approx 0$ и нулевых значениях источников. Произведем затем преобразования переменных

$$B' \rightarrow B'' = B' - K^{1/2}\lambda, \quad \omega' \rightarrow \omega'' = \omega' + k^{1/2}\eta, \quad \bar{\omega}' \rightarrow \bar{\omega}'' = \bar{\omega}' + k^{1/2}\bar{\eta}.$$

Единственный член, дающий вклад в рассматриваемую вершину, содержит произведение всех трех источников и имеет вид

$$g \sum (\partial_\mu(k\bar{\eta})_a(x)) f_{abc} (K\lambda)_c^\mu(x) (k\eta)_b(x);$$

таким образом, для вершины взаимодействия духов и глюонов получаем формулу

$$\begin{aligned} & \langle T \hat{\omega}_a(x_1) \hat{\omega}_b(x_2) \hat{B}_c^\mu(x_3) \rangle_0 \Big|_{\substack{\text{1-й поряд-} \\ \text{док по } g}} \\ &= \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} e^{-ix_1 \cdot p_1} \frac{i}{p_1^2} \int \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} e^{-ix_2 \cdot p_2} \frac{i}{p_2^2} \int \frac{d^4 p_3}{(2\pi)^4} e^{-ix_3 \cdot p_3} \\ & \quad \times i \frac{-g^{\mu\nu} + (1 - \lambda^{-1}) p_3^\mu p_3^\nu / p_3^2}{p_3^2} (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 + p_3) g f_{cba} p_{1\nu} \end{aligned}$$

снова в полном соответствии с ожидаемым результатом.

Наконец, рассмотрим вершину

$$\langle T \hat{q}_1(x_1) \hat{N}_{NS}^{\mu_1 \dots \mu_n}(x_2) \hat{q}_2(x_3) \rangle_0 \quad (42.7)$$

в нулевом порядке теории возмущений по константе взаимодействия g , где операторы N (см. § 19) имеют вид

$$\hat{N}_{NS}^{\mu_1 \dots \mu_n}(x) = \frac{1}{2} i^{n-1} \mathcal{L} : \hat{q}_2(x) \gamma^{\mu_1} \hat{D}^{\mu_2} \dots \hat{D}^{\mu_n} \hat{q}_1(x) : - \text{члены,} \quad (42.8)$$

содержащие свертки.

Чтобы вычислить величину (42.7), введем в выражение (41.11) новый источник

$$j_{\mu_1 \dots \mu_n} N_{NS}^{\mu_1 \dots \mu_n}(x),$$

так что

$$\langle T \hat{q}_1(x_1) \hat{N}_{NS}^{\mu_1 \dots \mu_n}(x_2) \hat{q}_2(x_3) \rangle_0 = \frac{i \delta^3 \log Z}{\delta \xi_1(x_1) \delta \bar{\xi}_2(x_3) \delta j_{\mu_1 \dots \mu_n}(x_2)} \Big|_{\substack{g=0 \\ \text{источники} = 0}}. \quad (42.9)$$

В нулевом порядке по константе взаимодействия g глюоны или духи никакой роли не играют, и по ним можно провести интегрирование. Аналогично ковариантные производные оператора N можно заменить обычными производными.

Кварковые поля рассматриваются так же, как поля глюонов или духов. Используя определения

$$q'_f = S^{-1/2} q_f, \quad \bar{q}'_f = \bar{q}_f \bar{S}^{-1/2}, \quad f = 1, 2,$$

где матрица S задается соотношениями

$$S^{-1} q_f(x) = \not{\partial} q_f(x), \quad \bar{q}_f(x) \bar{S}^{-1} = \bar{q}_f(x) \not{\partial},$$

находим, что в нулевом порядке по константе связи g производящий функционал описывается выражением

$$\begin{aligned} Z = (\text{constant}) \int (dq) (d\bar{q}) J(S) J(\bar{S}) \\ \times \exp i \int d^4x \left\{ \bar{q}'_1 q'_1 + \bar{q}'_2 q'_2 + \bar{\xi}_1 S^{1/2} q'_1 + \bar{\xi}_2 S^{1/2} q'_2 \right. \\ \left. + (\bar{q}'_1 \bar{S}^{1/2}) \xi + (\bar{q}'_2 \bar{S}^{1/2}) \xi_2 + (\bar{S}^{1/2} N_{NS}^{\mu_1 \dots \mu_n} S^{1/2}) j_{\mu_1 \dots \mu_n} \right\}. \end{aligned} \quad (42.10)$$

Проведем замену переменных

$$q''_f = q'_f + S^{1/2} \xi_f, \quad \bar{q}''_f = \bar{q}'_f + \bar{\xi}_f \bar{S}^{1/2}.$$

Единственный член, содержащий все три источника ξ_1 , ξ_2 и j имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{S} N_{NS}^{\mu_1 \dots \mu_n} S j_{\mu_1 \dots \mu_n} \\ \equiv \frac{1}{2} i^{n-1} \left\{ \mathcal{L}(\bar{\xi}_2 \bar{S}^{-1})(x) \gamma^{\mu_1} \vec{\partial}^{\mu_2} \dots \vec{\partial}^{\mu_n} (S^{-1} \xi_1)(x) - \text{свертки} \right\} j_{\mu_1 \dots \mu_n}(x), \end{aligned}$$

так что, используя явное выражение для матрицы S , получаем

$$\begin{aligned} \langle T \hat{q}_1(x_1) \hat{N}_{NS}^{\mu_1 \dots \mu_n}(x_2) \hat{q}_2(x_3) \rangle_0 \\ = \int \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} e^{-ip_2 \cdot x_2} \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} e^{-ip_1 \cdot x_1} \frac{i}{\not{p}_1} \frac{1}{2} \left\{ \mathcal{L} \gamma^{\mu} p_3^{\mu_2} \dots p_3^{\mu_n} - \text{свертки} \right\} \\ \times \int \frac{d^4 p_3}{(2\pi)^4} e^{ip_3 \cdot x_3} \frac{i}{\not{p}_3} (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - p_3). \end{aligned} \quad (42.11)$$

Полученную формулу можно упростить, введя вектор Δ^μ , удовлетворяющий условию $\Delta^2 = 0$, и свернув его с выражением (42.11):

$$\Delta_{\mu_1} \dots \Delta_{\mu_n} \langle T \hat{q}_1(x_1) \hat{N}_{NS}^{\mu_1 \dots \mu_n}(x_2) \hat{q}_2(x_3) \rangle_0 =$$

$$= \int \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} e^{-ip_2 \cdot x_2} \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} e^{-ip_1 \cdot x_1} \frac{i}{p_1} \Delta(\Delta \cdot p_3)^{n-1} \int \frac{d^4 p_3}{(2\pi)^4} e^{ip_3 \cdot x_3} \frac{i}{p_3} \times (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - p_3). \quad (42.12)$$

Результат автоматически оказывается симметричным по индексам; члены, содержащие следы от произведений векторов Δ^μ (члены вида $g^{\mu\mu} \Delta_\mu \Delta_\mu$), обращаются в нуль. Конечно, вершину можно восстановить дифференцированием полученного результата по компонентам векторов $\Delta(\partial/\partial \Delta_{\mu_1}) \dots (\partial/\partial \Delta_{\mu_n})$. Уравнение (42.12) приводит к фейнмановским правилам диаграммной техники, приведенным в приложении Д и используемым в § 20.

§ 43. Евклидова формулировка квантовой хромодинамики

Рассмотрим тензор энергии-импульса для чисто янг-миллсовской КХД, описываемый выражением (10.2). Вклад кварковых полей в этот тензор не включается; вообще кварки не имеют отношения к вопросам, рассматриваемым в этом и следующих двух параграфах. Выражение для чисто янг-миллсовского тензора энергии-импульса можно записать в виде

$$\Theta^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \sum_a G_a^{\mu\alpha} G_a^{\nu\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \sum_a \tilde{G}_a^{\mu\alpha} \tilde{G}_a^{\nu\beta}. \quad (43.1)$$

Отсюда следует, что нулевая компонента Θ^{00} для *реальных* глюонных полей положительна:

$$\Theta^{00} = \frac{1}{2} \sum_{k,a} \left\{ (G_a^{0k})^2 + (\tilde{G}_a^{0k})^2 \right\}. \quad (43.2)$$

Таким образом, условие $\Theta^{\mu\nu} = 0$ выполняется только в том случае, когда $G \equiv 0$, и, следовательно, с вакуумом можно отождествить только состояние, в котором отсутствуют глюонные поля. Но выражение (43.2) не обладает определенным знаком, если допустить, что тензор глюонного поля $G^{\mu\nu}$ может принимать комплексные значения. Особенно важен случай, когда комплексный тензор $G^{\mu\nu}$, определенный в пространстве Минковского, соответствует вещественному тензору глюонных полей $\underline{G}^{\mu\nu}$, определенному в евклидовом пространстве-времени. Как обсуждалось в конце § 40, такая ситуация свидетельствует о возможном туннельном переходе. Это является основанием для того, чтобы

искать решения уравнений КХД в евклидовом пространстве¹⁾.

Другая причина заключается в том, что в пространстве Минковского

$$\tilde{\tilde{G}}_a^{\mu\nu} = -G_a^{\mu\nu},$$

поэтому дуальными

$$\tilde{G} = \pm G. \quad (43.3)$$

могут быть только тривиальные полевые конфигурации $G = 0$. (Если в правой части равенства (43.3) стоит знак +, то говорят, что тензор G *самодуален*, если знак -, то тензор G *антидуален*.) В евклидовом же пространстве справедливо равенство

$$\tilde{\tilde{G}} = G,$$

так что могут существовать и в действительности существуют нетривиальные дуальные полевые конфигурации G . Кроме того, дуальные евклидовы поля G автоматически удовлетворяют уравнениям движения. Это происходит по следующим причинам: уравнения движения для глюонных полей имеют вид (вспомним уравнение (3.6))

$$D_\mu G_a^{\mu\nu} \equiv \partial_\nu G_a^{\mu\nu} + g \sum f_{abc} B_{b\mu} G_c^{\mu\nu} = 0; \quad (43.4)$$

условие

$$D_\mu \tilde{G}_a^{\mu\nu} = 0 \quad (43.5)$$

представляет собой не что иное, как тождество Бьянки, которому удовлетворяет любой тензор $G = D \times B$, независимо от того, является или нет поле B решением уравнений движения. Но если тензор G дуален, то, как показано в работе [219], из (43.5) следует соотношение (43.4).

Связь с проблемой вакуума возникает в силу того, что в евклидовом пространстве формула (43.1) для тензора энергии-импульса янг-миллсовских полей заменяется выражением вида

$$\Theta_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \sum_{a,\lambda} \{ \underline{G}_{\mu\lambda}^a \underline{G}_{\nu\lambda}^a - \tilde{G}_{\mu\lambda}^a \tilde{G}_{\nu\lambda}^a \}, \quad (43.6)$$

¹⁾ Такая процедура обычно называется евклидовой формулировкой КХД или евклидовой формулировкой теории поля. Величины, определяемые в евклидовом пространстве-времени, мы будем отличать от соответствующих величин, определенных в пространстве Минковского, подчеркивая их снизу. Кроме того, суммы по повторяющимся пространственно-временным индексам мы будем выписывать в явном виде.

которое в случае дуальных полевых конфигураций обращается в нуль: $\Theta_{\mu\nu} = 0$. Таким образом, дуальные поля \underline{G} могут соответствовать нетривиальным вакуумным состояниям.

Другое свойство дуальных полей состоит в том, что они должны удовлетворять условию минимума евклидова действия, для которого можно написать

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{1}{4} \int d^4 x \sum \underline{G}_{\mu\nu}^a \underline{G}_{\mu\nu}^a \\ &= \frac{1}{4} \sum \int d^4 x \left\{ \frac{1}{2} (\underline{G}_{\mu\nu}^a \pm \tilde{G}_{\mu\nu}^a)^2 \mp \underline{G}_{\mu\nu}^a \tilde{G}_{\mu\nu}^a \right\} > \frac{1}{4} \left| \int d^4 x \sum G \tilde{G} \right|. \end{aligned} \quad (43.7)$$

Таким образом, действие является положительно определенной величиной, достигающей минимума в случае дуальных полей, когда справедливо равенство

$$\mathcal{A} = \frac{1}{4} \left| \int d^4 x \sum \underline{G}_{\mu\nu}^a \tilde{G}_{\mu\nu}^a \right| = \frac{1}{4} \int d^4 x \sum_{\mu, \nu, a} (\underline{G}_{\mu\nu}^a)^2. \quad (43.8)$$

Но по крайней мере в *условиях, когда справедливо квазиклассическое ВКБ-приближение*, известно, что амплитуда туннелирования определяется величиной $\exp(-\mathcal{A})$, поэтому в ведущем порядке эффект туннелирования, если он существует, определяется дуальными полевыми конфигурациями.

Мы уже упоминали о "нетривиальных вакуумных состояниях". Нетрудно убедиться, что существуют такие ненулевые значения глюонных полей B , для которых $G = 0$. В самом деле, поля общего вида, удовлетворяющие этому условию, называются *чистой калибровкой*; их можно получить из тривиальных полевых конфигураций $B = 0$ калибровочными преобразованиями. Чтобы убедиться в этом, запишем конечное калибровочное преобразование в виде

$$B_a^\mu(x) \rightarrow B_a'^\mu(x) = 2 \operatorname{Tr} t^a U^{-1}(x) t^b U(x) B_b^\mu(x) - \frac{2}{ig} \operatorname{Tr} t^a U^{-1}(x) \partial^\mu U(x) \quad (43.9)$$

(ср. с формулой (3.1)). Здесь $U(x)$ — любая зависящая от пространственно-временной точки x матрица, удовлетворяющая условиям $U^\dagger(x) = U^{-1}(x)$, $\det U(x) = 1$. Но если $B = 0$, то преобразованное поле B' имеет вид

$$B_a'^\mu(x) = - \frac{2}{ig} \operatorname{Tr} t^a U^{-1}(x) \partial^\mu U(x). \quad (43.10)$$

Калибровочная инвариантность тензора напряженности глюонных полей $G_a^{\mu\nu}$ обеспечивает равенство $G^{\mu\nu} = G^{\mu\nu} = 0$. Нетривиальными будут решения, для которых $G \neq 0$.

§ 44. Инстантоны

Будем искать евклидовы полевые конфигурации, ведущие к дуальному тензору напряженностей G . Для упрощения обозначений предполагаем суммирование по повторяющимся или опущенным цветовым индексам.

Нас интересуют поля, приводящие к конечному значению действия. Это означает, что мы требуем, в частности, выполнения условия

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |x|^2 \underline{G}_{\mu\nu}(x) = 0, \quad (44.1)$$

где евклидова длина определяется формулой

$$|x| \equiv + \left\{ \sum_{\mu=1}^4 (x_{\mu})^2 \right\}^{1/2}.$$

Пусть матрица $U(x)$ осуществляет калибровочное преобразование, т.е. является матрицей размерности 3×3 , для которой $\det U = 1$ и $U^{-1} = U^+$. Условие (44.1) будет выполнено, если при больших значениях x глюонное поле B представляет собой результат калибровочного преобразования, проведенного над нулевым полем, т.е. асимптотически является *чистой калибровкой*. Таким образом,

$$\begin{aligned} B_a^{\mu} &\xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} \frac{-2}{ig} \text{Tr } t^a U^{-1}(x) \partial^{\mu} U(x), \\ G_a^{\mu\nu} &\xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0, \end{aligned} \quad (44.2)$$

Попробуем рассмотреть анзац

$$\underline{B}_{\mu}^a = \varphi(|x|^2) \hat{B}_{\mu}^a, \quad \hat{B}_{\mu}^a = \frac{-2}{ig} \text{Tr } t^a U^{-1} \partial_{\mu} U, \quad \varphi \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 1. \quad (44.3)$$

Поучительно проверить, что тензор напряженностей $\hat{\underline{G}}$, соответствующий полям \hat{B} , равен нулю. С этой целью определим матрицы

$$\underline{\mathcal{B}}_{\mu} \equiv t^a \underline{B}_{\mu}^a, \quad \underline{\mathcal{G}}_{\mu\nu} \equiv t^a \underline{G}_{\mu\nu}^a. \quad (44.4a)$$

Очевидно, справедливы соотношения

$$\underline{B}_{\mu}^a = 2 \text{Tr } t^a \underline{\mathcal{B}}_{\mu}, \quad \underline{G}_{\mu\nu}^a = 2 \text{Tr } t^a \underline{\mathcal{G}}_{\mu\nu}, \quad (44.4б)$$

$$\underline{\mathcal{G}}_{\mu\nu} = \partial_{\mu} \underline{\mathcal{B}}_{\nu} - \partial_{\nu} \underline{\mathcal{B}}_{\mu} - ig [\underline{\mathcal{B}}_{\mu}, \underline{\mathcal{B}}_{\nu}]. \quad (44.4в)$$

Соотношения (44.4) справедливы, конечно, и в пространстве Минковского. Но

если поле \underline{B} описывается формулами (44.3), то оно имеет асимптотику

$$\underline{B}_\mu|_{|x| \rightarrow \infty} \simeq -\frac{1}{ig} U^{-1} \partial_\mu U, \quad (44.5)$$

так что

$$\begin{aligned} \underline{G}_{\mu\nu} &\simeq_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{-ig} \{ \partial_\mu (U^{-1} \partial_\nu U) - \partial_\nu (U^{-1} \partial_\mu U) \} \\ &\quad - ig \left(\frac{1}{-ig} \right)^2 [U^{-1} \partial_\mu U, U^{-1} \partial_\nu U] \\ &= \frac{1}{-ig} \{ -U^{-1} (\partial_\mu U) U^{-1} (\partial_\nu U) + U^{-1} (\partial_\nu U) U^{-1} (\partial_\mu U) \} \\ &\quad + \frac{1}{-ig} [U^{-1} \partial_\mu U, U^{-1} \partial_\nu U] = 0. \end{aligned}$$

Заметим, что члены второго и четвертого порядка по матрице U сокращают друг друга; множитель $1/g$ оказывается существенным в силу нелинейности тензора \underline{G} . Это отражает непертурбативный характер решений.

Если U представляет собой элемент группы, который можно непрерывным образом связать с тождественным преобразованием, то тензор \underline{G} обращается в нуль не только асимптотически: $\underline{G} \equiv 0$. Поэтому необходимо рассмотреть такую матрицу U , которую нельзя представить в простой форме $\exp[i t \theta(x)]$. Единственная возможность состоит в объединении пространственно-временных и цветовых индексов. Это оказывается допустимым только благодаря тому, что размерность пространства-времени равна четырем. Соответствующей группой инвариантности является группа $SO(4)$, алгебра Ли которой (ее комплексная алгебра Ли) изоморфна произведению двух алгебр Ли группы $SU(2)$. Таким образом, группу $SO(4)$ можно связать с подгруппой $SU(2)$ цветовой группы $SU(3)$. Поэтому будем искать матрицу U в виде

$$U = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где u — матрица $SU(2)$ размерности 2×2 . Пусть $\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ — единичная матрица, а σ_i — матрицы Паули. Любую матрицу размерности 2×2 можно записать в виде суммы $A = \sum a_\mu \sigma_\mu$. Если ввести обозначения $\hat{a}_i = -a_i$, $\hat{a}_4 = a_4$, то легко убедиться в справедливости равенств

$$(\sum a_\mu \sigma_\mu)(\sum \hat{a}_\mu \sigma_\mu) = \sum a_\mu \hat{a}_\mu$$

и

$$\det A = \sum a_\mu \hat{a}_\mu;$$

таким образом, мы получаем, что матрицу общего вида u можно записать в виде

$$u_f = \frac{1}{|f(x)|} \{ \sigma_4 f_4(x) + i \vec{\sigma} \vec{f}(x) \}, \quad f_\mu(x) \text{ вещественно.} \quad (44.6)$$

Полагая $f_\mu(x) = x_\mu$, получаем простейшее решение

$$u(x) = \frac{1}{|x|} (\sigma_4 x_4 + i \vec{\sigma} \vec{x}). \quad (44.7a)$$

Пространственно-временные и цветовые индексы нетривиальным образом связаны друг с другом, поэтому для матрицы u нельзя использовать представление $u(x) = \exp[(i/2) \vec{\sigma} \vec{\theta}(x)]$. Как отмечалось выше, попытаемся представить глюонные поля в виде¹⁾

$$\underline{\mathcal{B}}_\mu(x) = \varphi(|x|^2) \underline{\hat{\mathcal{B}}}_\mu(x), \quad \underline{\hat{\mathcal{B}}}_\mu(x) = \frac{1}{-ig} U^{-1}(x) \partial_\mu U(x), \quad U = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (44.7b)$$

Полезно вспомнить, что, так как поле $\underline{\hat{\mathcal{B}}}$ является чистой калибровкой, отвечающее ему значение тензора напряженностей глюонных полей $\underline{\mathcal{G}}$ равно нулю, поэтому

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{G}}_{\mu\nu} &= \partial_\mu \underline{\mathcal{B}}_\nu - \partial_\nu \underline{\mathcal{B}}_\mu - ig [\underline{\mathcal{B}}_\mu, \underline{\mathcal{B}}_\nu] \\ &= (\partial_\mu \varphi) \underline{\hat{\mathcal{B}}}_\nu - (\partial_\nu \varphi) \underline{\hat{\mathcal{B}}}_\mu + \varphi (\partial_\mu \underline{\hat{\mathcal{B}}}_\nu - \partial_\nu \underline{\hat{\mathcal{B}}}_\mu) \\ &\quad - ig \varphi^2 [\underline{\hat{\mathcal{B}}}_\mu, \underline{\hat{\mathcal{B}}}_\nu] \\ &= 2\varphi' \{ x_\mu \underline{\hat{\mathcal{B}}}_\nu - x_\nu \underline{\hat{\mathcal{B}}}_\mu \} + (\varphi - \varphi^2) \{ \partial_\mu \underline{\hat{\mathcal{B}}}_\nu - \partial_\nu \underline{\hat{\mathcal{B}}}_\mu \}; \quad \varphi' = \frac{d\varphi(|x|^2)}{d|x|^2}. \end{aligned}$$

Проще всего его получить, если заметить, что $\hat{B}_\mu^a = -(2/g|x|^2) \sum \eta_{\rho\mu}^a x_\rho$, где η тензор приведен ниже. Тогда

$$\begin{aligned} \underline{G}_{\mu\nu}^a &= \frac{4i^2}{|x|^2 g} \left(\varphi' - \frac{\varphi - \varphi^2}{|x|^2} \right) \sum_\rho (\eta_{\rho\nu}^a x_\rho x_\mu - \eta_{\rho\mu}^a x_\rho x_\nu) \\ &\quad + \frac{4i^2}{|x|^2 g} (\varphi - \varphi^2) \eta_{\mu\nu}^a. \end{aligned}$$

¹⁾ Анзацы более общего вида предложены в работах [78, 266].

Смешанный тензор η определяется выражением

$$\eta_{\alpha\beta}^a = \begin{cases} \epsilon_{\alpha\beta\gamma 4} + \delta_{\alpha 4} \delta_{\beta\gamma} - \delta_{\beta 4} \delta_{\alpha\gamma}, & a = 1, 2, 3 \\ 0, & a = 4, \dots, 8. \end{cases} \quad (44.8)$$

Отметим, что этот тензор самодуален: $\eta_{\alpha\beta} = \tilde{\eta}_{\alpha\beta}$; следовательно, условие самодуальности тензора \underline{G} выполняется в том случае, если функция φ удовлетворяет уравнению

$$\varphi' - \frac{\varphi - \varphi^2}{|x|^2} = 0,$$

т.е. глюонное поле \underline{B}_μ имеет вид

$$\underline{B}_\mu(x) = \frac{|x|^2}{|x|^2 + \lambda^2} \cdot \frac{1}{-ig} U^{-1}(x) \partial_\mu U(x), \quad \lambda \text{ произвольно.} \quad (44.9)$$

Это и есть *инстантонное* решение, найденное в работе [35]. Отметим, что оно локализовано в окрестности $x \approx 0$, т.е. в пространстве и во времени (отсюда и название "инстантон" — мгновенный). Из выражения (44.9) заменой $x \rightarrow x - y$ можно получить решения, локализованные в окрестности произвольной пространственно-временной точки $x \approx y$. В дальнейшем это окажется полезным. Выражению (44.9) можно придать большую наглядность, подставив в него выражение для матрицы U ; при этом мы найдем, что поле \underline{B} вещественно:

$$\underline{B}_\mu^a(x) = \frac{1}{g} \cdot \frac{-2}{|x|^2 + \lambda^2} \sum_p \eta_{\rho\mu}^a x_\rho. \quad (44.10)$$

Из вида тензора η следует связь между пространственно-временными и цветовыми преобразованиями. Соответствующий тензор напряженностей имеет вид

$$\underline{G}_{\mu\nu}^a(x) = \frac{1}{g} \cdot \frac{-4\lambda^2 \eta_{\mu\nu}^a}{(|x|^2 + \lambda^2)^2}. \quad (44.11)$$

Как и следовало ожидать, глюонные поля B и тензор напряженностей G при продолжении их в пространство Минковского оказываются сингулярными (и комплексными!) величинами, так как интервал x^2 не является уже положительно определенным, а следовательно, знаменатель $x^2 + \lambda^2$ может обращаться в нуль. Замечательная особенность инстантонных решений состоит в том, что если глюонное поле B при больших x имеет асимптотику $B \approx 1/|x|$, то вследствие сокращения большого числа различных членов, входящих в выражение для тензора напряженностей G , последний обладает поведением $G \approx 1/|x|^4$ и, таким образом, удовлетворяет требованию (44.1).

В дальнейшем мы будем использовать только решение (44.9); но имеются и другие решения¹⁾, найденные в работах [35, 66, 86]. Оказалось, что существует точная симметрия между самодуальными и антидуальными решениями: в антидуальных решениях, соответствующих (44.10), используется тензор

$$\bar{\eta}_{\alpha\beta}^a = \eta_{\alpha\beta}^a, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3, \quad \bar{\eta}_{\alpha\beta}^a = -\eta_{\alpha\beta}^a, \quad \alpha \text{ или } \beta = 4. \quad (44.12)$$

Такие решения называют *антиинстантонами*.

Вычислим теперь действие, соответствующее инстантонному решению. Используя соотношение $\sum \eta_{\mu\nu}^a \eta_{\mu\nu}^a = 12$ и формулы, приведенные в приложении Б, получаем результат

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{1}{4} \int d^4 x \sum G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a \\ &= \frac{48\lambda^2}{g^2} \int d^4 x \frac{1}{(|x|^2 + \lambda^2)^4} = \frac{8\pi^2}{g^2}. \end{aligned} \quad (44.13)$$

В § 45 показано, что туннелирование из состояния $|n_+ \rangle$ в состояние $|n_+ + \nu \rangle$, где ν — целое число, осуществляется через инстантонные решения. В этом смысле они доказывают существование нетривиальной структуры вакуума КХД, которое обсуждалось в § 38. Может показаться странной необходимость подробного обсуждения этой проблемы, поскольку точные решения уже найдены. Ответ на этот вопрос состоит в требовании конечности действия, при котором такие решения ищались. Как обсуждалось в § 40, наблюдаемая амплитуда туннельного перехода между двумя состояниями $|a \rangle$ и $|b \rangle$ определяется формулой

$$\langle a | b \rangle_{\text{phys}} = \langle a | e^{-\mathcal{A}} | b \rangle / \langle b | e^{-\mathcal{A}} | b \rangle, \quad (44.14)$$

так что даже полевые конфигурации, приводящие к бесконечному значению действия (при условии что бесконечности в числителе и в знаменателе (44.14) взаимно сокращаются), могут давать конечное значение амплитуды туннельного перехода. Можно накладывать требование конечности действия, но оно не является строго обязательным. В действительности, как будет показано в § 45, инстантоны приводят к *целочисленным* значениям параметра ν , тогда как, согласно работе [82], обсуждавшейся в § 38, при некоторых значениях масс кварков параметр ν оказывается нецелочисленным²⁾. Важность инстан-

¹⁾ Решения с конечным значением действия, определенного в пространстве Минковского, и с бесконечным в евклидовом пространстве.

²⁾ "Полуинстантоны" с конечным евклидовым действием и полуцелым топологическим зарядом, по-видимому, недавно теоретически получены в работе [127].

тонных решений состоит в том, что они обеспечивают явные эффекты туннелирования и дают возможность оценить их. Но, по-видимому, инстантоны не исчерпывают всех возможных непertурбативных решений в квантовой хромодинамике. Помня об этих оговорках, продолжим изучение инстантонных решений и требования конечности действия.

§ 45. Связь инстантонных решений с вакуумом КХД и топологическим квантовым числом

Рассмотрим величину (см. выражение (38.3))

$$Q_K = \frac{g^2}{32\pi^2} \int d^4x \sum \tilde{G}_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a. \quad (45.1)$$

Как обсуждалось выше, глюонные поля, стремящиеся на бесконечности к нулю, имеют вид

$$\mathcal{B}_\mu \underset{x \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{-1}{ig} T_B^{-1}(x) \partial_\mu T_B(x), \quad (45.2)$$

где T_B — произвольная матрица из группы $SU(3)$. Рассмотрим переменную x , лежащую на поверхности четырехмерной сферы ∂S_4 . Калибровочное поле ставит в соответствие каждой пространственно-временной точке x величину $T_B(x)$ из калибровочной группы. Таким образом, мы имеем отображение поверхности ∂S_4 в группу $SU(3)$. Можно сказать, что две полевые конфигурации *гомотопны*, и выполняется соотношение $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, если они могут быть переведены одна в другую непрерывным преобразованием. Очевидно, что это соотношение является соотношением эквивалентности; таким образом, все калибровочные поля можно разбить на гомотопические классы. Число гомотопических классов бесконечно, но *считно*¹⁾, так что поля можно нумеровать целым числом n в соответствии с номером гомотопического класса, к которому они принадлежат. Наша очередная задача состоит в том, чтобы показать, что число n совпадает с величиной Q_K , определяемой выражением (45.1). Величина Q_K называется *квантовым числом Понтрягина*, или *топологическим (спиральным) квантовым числом*. Название в скобках связано с кратностью отображения четырехмерной сферы на группу.

Чтобы убедиться в этом, отметим прежде всего, что, как можно проверить прямыми вычислениями, выражение (45.1) инвариантно относительно непрерывных калибровочных преобразований. Далее заметим, что подынтегральное вы-

¹⁾ Это справедливо для любой простой калибровочной группы, содержащей в себе подгруппу $SU(2)$.

ражение в (45.1) в действительности представляет собой 4-дивергенцию. В самом деле, как показано в § 38,

$$\frac{g^2}{32\pi^2} \sum \underline{G}_{\mu\nu}^a \tilde{\underline{G}}_{\mu\nu}^a = \sum \partial_\mu \underline{K}_\mu, \quad (45.3)$$

где \underline{K} — "киральный ток":

$$\underline{K}_\mu = \frac{g^2}{16\pi^2} \sum \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \left\{ (\partial_\rho \underline{B}_\sigma^a) \underline{B}_\nu^a + \frac{1}{3} g f_{abc} \underline{B}_\rho^a \underline{B}_\sigma^b \underline{B}_\nu^c \right\}. \quad (45.4)$$

Используя теорему Гаусса, находим

$$\begin{aligned} Q_K &= \frac{g^2}{32\pi^2} \int d^4x \sum \underline{G}_{\mu\nu}^a \tilde{\underline{G}}_{\mu\nu}^a \\ &= \int_{\partial S_4} \sum d\sigma_\mu \underline{K}_\mu, \end{aligned}$$

где $d\sigma_\mu$ — элемент поверхности четырехмерной сферы ∂S_4 . Используя формулу (45.4), получаем выражение

$$Q_K = \frac{g^3}{48\pi^2} \sum \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} f_{abc} \int_{\partial S_4} d\sigma_\mu \underline{B}_\rho^a \underline{B}_\sigma^b \underline{B}_\nu^c.$$

Вычисления упрощаются, если принять, что $\underline{B}_a = 0$ для всех значений a , кроме $a = 1, 2, 3$. Это оказывается возможным благодаря тому, что гомотопические соотношения зависят только от подгруппы $SU(2)$. В этом случае можно принять

$$\underline{B}_\mu = \frac{1}{2} \sum \sigma_k \underline{B}_\mu^k,$$

и представление (45.2) остается справедливым, если входящая в него матрица T принадлежит группе $SU(2)$. Тогда получаем следующее выражение для величины Q_K :

$$Q_K = \frac{1}{12\pi^2} \sum \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \int_{\partial S_4} d\sigma_\mu \text{Tr} \{ (T^{-1} \partial_\rho T) (T^{-1} \partial_\sigma T) (T^{-1} \partial_\nu T) \}. \quad (45.5)$$

Предположим, что мы параметризовали элементы группы $SU(2)$ тремя углами Эйлера ξ_i ; тогда инвариантную по группе меру можно записать в виде

$$d\mu = \text{Tr} \left\{ T^{-1} \frac{\partial T}{\partial \xi_1} T^{-1} \frac{\partial T}{\partial \xi_2} T^{-1} \frac{\partial T}{\partial \xi_3} \right\} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3, \quad \int_{SU(2)} d\mu = 12\pi^2.$$

Мы видим, что выражение (45.5) в точности определяет кратность, с которой поверхность четырехмерной сферы обернута вокруг группы $SU(2)$. Таким образом, как это очевидно из формулы (44.13) и свойств самодуальных (анти-дуальных) полевых конфигураций, инстантонное (антиинстантонное) решение имеет топологическое квантовое число $Q_K = \pm 1$. Нетрудно построить решение, отвечающее любому значению топологического заряда ν . Предположим, что параметр ν положителен. Рассмотрим разреженный газ ν инстантонов, описываемый полем

$$\underline{B}_\mu^{(\nu)}(x) = \sum_{k=1}^{\nu} \underline{B}_\mu^a(x - y_k). \quad (45.6a)$$

Пусть поле \underline{B} имеет величину (44.10), и пусть выполняются условия $|y_i - y_k| \rightarrow \infty$. При вычислении тензора напряженностей $G^{(\nu)}$ или его квадрата $G^{(\nu)} G^{(\nu)}$ перекрытие между двумя различными членами в формуле (45.6) при $|y_i - y_k| \rightarrow \infty$, очевидно, стремится к нулю; следовательно, в этом пределе справедливо равенство

$$\frac{g^2}{32\pi^2} \int d^4x \underline{G}^{(\nu)} \tilde{\underline{G}}^{(\nu)} = \nu. \quad (45.6b)$$

Таким образом, мы успешно справились с задачей поиска решений из каждого гомотопического класса. Более интересным оказывается тот факт, что многоинстантонные полевые конфигурации дуальны, а следовательно, соответствующий тензор энергии-импульса обращается в нуль: $\underline{\Theta}^{(\nu)} = 0$. Это означает, что в квантовой хромодинамике (по крайней мере в ее евклидовой версии) нет единственного вакуума, а есть бесконечное число вакуумных полевых конфигураций $|\nu\rangle$, $\nu = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots$, которые топологически эквивалентны друг другу. Эта ситуация похожа на случай, представленный на рис. 30, б.

Чтобы исследовать это явление более детально, введем в рассмотрение другую гиперповерхность, а именно возьмем цилиндр с осью вдоль оси времени, как показано на рис. 31, а. Выберем кулоноподобную калибровку, так что выполняется асимптотическое условие $\underline{B}_4 = 0$ при $x \rightarrow \infty$. Тогда останутся интегралы только вдоль оснований цилиндра:

$$\nu = \left\{ \int_{t''} - \int_{t'} \right\} dx_1 dx_2 dx_3 \underline{K}_4^{(\nu)}.$$

Поскольку поле на бесконечности обращается в нуль, пространственно бесконечно удаленные точки, лежащие на основаниях цилиндра, можно отождествить, так что возникают интегралы по большим трехмерным сферам, одна из которых расположена при $t = -\infty$, а другая при $t = +\infty$. Калибровку выберем таким

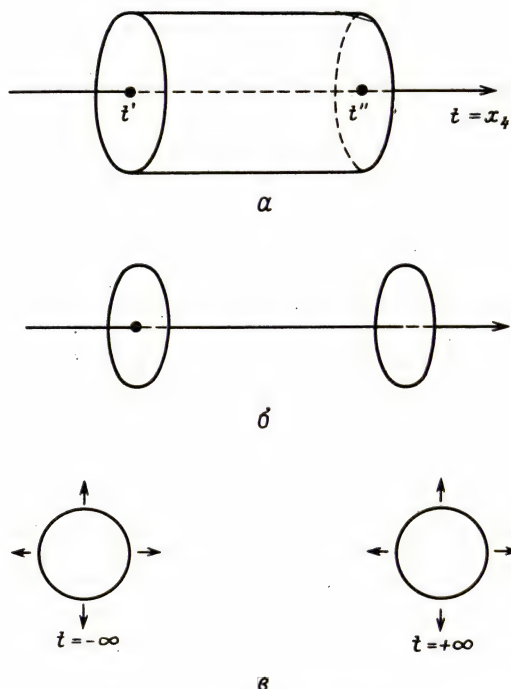


Рис. 31. Области интегрирования в выражениях для топологического заряда инстан-
тонов.

образом, чтобы выполнялось условие

$$\int_{t' \rightarrow -\infty} dx_1 dx_2 dx_3 \underline{K}_4^{(\nu)} = n(-\infty) = \text{целое число.}$$

Доказательство существования калибровки, непрерывным образом связанной с тождественным преобразованием и удовлетворяющей этому условию, можно найти в лекциях [227]. Принимая во внимание формулу (45.6б), получаем равенство

$$\int_{t''} dx_1 dx_2 dx_3 \underline{K}_4^{(\nu)} = n(t''), \quad n(+\infty) - n(-\infty) = \nu. \quad (45.7)$$

Многоинстантонные полевые конфигурации $\underline{B}^{(\nu)}$ связывают вакуумные состояния на $-\infty$ и $+\infty$, топологические квантовые числа которых различаются на ν единиц. Поэтому в квантовом случае в соответствии с обсуждением в § 40 можно ожидать, что эти два вакуумных состояния могут быть связаны туннель-

ным переходом, амплитуда которого в ведущем порядке описывается формулой

$$\langle n(+\infty) | n(-\infty) \rangle = (\text{constant}) \exp(-\mathcal{Q}^{(v)}).$$

Как обсуждалось выше, минимум действия достигается на самодуальных (антидуальных) решениях, т.е. для инстантонов или антиинстантонов (если $|n(+\infty) - n(-\infty)| = 1$). Таким образом, в ведущем порядке амплитуда перехода имеет вид

$$\langle n(+\infty) | n(-\infty) \rangle \approx (\text{constant}) \exp \left\{ \frac{-8\pi^2 |v|}{g^2} \right\}. \quad (45.8)$$

Поправки высших порядков можно вычислить [252], разлагая в ряд поля n вблизи классических траекторий $B_{cl} = 0$, а вблизи траекторий $\underline{B}_{cl} = \underline{B}_{cl}^{(v)} = \underline{B}^{(v)}$. Они оказываются важными, так как дают константу в формуле (45.8). Действительно,

$$\exp \left\{ \frac{-8\pi^2 |v|}{g^2} \left(1 + a \frac{g^2}{16\pi^2} \right) \right\} = e^{-a/2} \exp \left\{ \frac{-8\pi^2 |v|}{g^2} \right\},$$

но эти члены не меняют качественно результат. Чтобы убедиться в справедливости выражения (45.8), необходимо рассмотреть случай, когда константа связи g мала и член $\exp(-2\pi/\alpha_g)$ подавляет любую константу.

Обратимся теперь к рассмотрению вакуумных состояний. Определение производящего функционала дано в § 39 и 41. Если в лагранжиане пренебречь членами, описывающими вклад духов и фиксирующими калибровку, то он (в евклидовой формулировке КХД) имеет вид

$$+ \langle 0 | 0 \rangle_- = \underline{Z} = \int (d\underline{B}) \exp \left\{ - \int d^4x \underline{\mathcal{L}}(\underline{B}) \right\}. \quad (45.9a)$$

Но теперь необходимо решить, по каким гомотопическим классам проводить интегрирование. Напомним, что левая часть соотношения (45.9a) представляла собой амплитуду $\langle 0, t = +\infty | 0, t = -\infty \rangle$; поэтому равенство (45.9a) следует переопределить в виде

$$\langle n(+\infty) | m(-\infty) \rangle = \int (d\underline{B}_{n-m}) \exp \left\{ - \int d^4x \underline{\mathcal{L}}(\underline{B}) \right\}. \quad (45.9b)$$

В рамках теории возмущений рассматривается лишь вакуумное состояние $|n=0\rangle$, но очевидно, что благодаря возможности туннелирования все вакуумные состояния $|n\rangle$ связаны между собой [61, 174, 252], так что ни одно из них не является стационарным и не может отвечать истинному вакуумному состоянию. Стационарные состояния, так же как блоховские состояния в тео-

рии твердого тела, получаются из суперпозиций

$$\sum_n e^{in\theta} |n\rangle \equiv |\theta\rangle.$$

Это выражение инвариантно относительно изменений топологического заряда. В самом деле, пусть Γ_k — оператор, изменяющий топологический заряд на k единиц; тогда

$$\Gamma_k |\theta\rangle = \sum_n e^{in\theta} |n+k\rangle = \sum_m e^{i(m-k)\theta} |m\rangle = e^{-ik\theta} |\theta\rangle,$$

откуда следует, что под действием этого оператора вакуумное состояние изменяет только свою фазу. Производящий функционал в терминах θ -вакуума можно записать в виде

$$\langle \theta(+\infty) | \theta'(-\infty) \rangle = N \delta(\theta - \theta') \sum_{\nu} e^{-i\nu\theta} \int (d\underline{B}^{(\nu)}) e^{-\int d^4x \mathcal{L}(\underline{B}^{(\nu)})}. \quad (45.10)$$

Здесь можно опустить функцию $\delta(\theta - \theta')$, которая отражает лишь тот факт, что физические миры, соответствующие различным значениям параметра θ , не связаны друг с другом. Кроме того, интегрирование по полям B в формуле (45.10) можно распространить на все полевые конфигурации, введя множитель

$$\delta\left[\nu - (g^2/32\pi^2) \int d^4x \sum \underline{G} \tilde{\underline{G}}\right];$$

но тогда суммирование по индексу ν выполняется тривиально, и мы получаем

$$Z = N \int (d\underline{B}) e^{-\int d^4x \mathcal{L}}, \quad (45.11a)$$

где

$$\mathcal{L}_\theta = -\frac{1}{4} \sum \underline{G} \underline{G} + \frac{ig^2\theta}{32\pi^2} \sum \underline{G} \tilde{\underline{G}}. \quad (45.11b)$$

Наконец, можно вернуться в пространство Минковского и сделать заключение, что из существования инстантонов следует, что истинный лагранжиан квантовой хромодинамики имеет вид

$$\mathcal{L}_\theta = -\frac{1}{4} \sum_a G_a^{\mu\nu} G_{a\mu\nu} - \frac{\theta g^2}{32\pi^2} \sum_a G_a^{\mu\nu} \tilde{G}_{a\mu\nu}, \quad (45.12)$$

подтверждая, таким образом, необходимость введения в общем случае члена \mathcal{L}_{10} (вспомним рассмотрение в начале § 38).

Можно задаться вопросом, в какой мере явления, рассмотренные в настоящем параграфе, изменяют результаты, полученные в параграфах книги, пред-

шествующих § 37. Во-первых, ограничения, полученные для параметра θ (§ 38), требуют, чтобы его значение было настолько малым, что член лагранжиана $\mathcal{L}_{1\theta}$ сам по себе практически не оказывает влияния. Во-вторых, инстантонное решение и связанные с ним явления представляют собой *дальнодействующие эффекты*; полевые конфигурации, достаточно быстро убывающие при $x \rightarrow \infty$, обладают нулевым топологическим зарядом $Q_K = 0$. До сих пор мы обсуждали лишь эффекты, связанные с малыми расстояниями (для распада $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$, глубокоэластичного рассеяния и т.д.); возможно, что режим теории возмущений по-прежнему применим и здесь. В этом можно убедиться, рассмотрев амплитуду туннелирования, обусловленного одноинстантонной полевой конфигурацией:

$$\langle 0 | \pm 1 \rangle \approx (\text{constant}) \exp\left(-\frac{2\pi}{\alpha_g}\right).$$

После проведения процедуры перенормировок константу связи α_g следует заменить бегущей константой связи, так что с точностью до логарифмических поправок выражение для амплитуды перехода принимает вид

$$\langle 0 | \pm 1 \rangle \approx \left(\frac{\Lambda^2}{Q^2} \right)^{(33-2n)/3}. \quad (45.13)$$

Эта формула показывает, что при больших передаваемых импульсах Q^2 туннельные эффекты пренебрежимо малы, и состояние $|0\rangle$ можно рассматривать как состояние истинного вакуума; при этом ошибка, вносимая выражением (45.13), оказывается много меньше, чем, например, эффекты от операторов твиста 4 или 6. В самом деле, оценки [31] показывают, что инстантонные поправки к процессам e^+e^- -аннигиляции или глубокоэластичного рассеяния полностью пренебрежимы при $Q^2 \gg 1 \text{ ГэВ}^2$. Таким образом, в случаях, когда инстантонные эффекты важны, вычисления в рамках теории возмущений неприменимы, а в случаях, когда можно использовать теорию возмущений, эффекты, обусловленные существованием инстантонов, оказываются ненаблюдаемыми. С этой точки зрения инстантоны похожи на мифическое животное — василиска, увидев которого, как гласит предание, человек умирает.

§ 46. Вопросы, не рассмотренные в книге

1. КХД на решетке

В принципе формализм интегралов по траекториям, по-видимому, осуществляет мечту теоретиков: сводит квантовую теорию поля к квадратурам. Кажется, что достаточно перейти от непрерывного пространства-времени к дискретной решетке с некоторым расстоянием δ между соседними узлами и размером N^4 и проинтегрировать определенный на этой решетке производя-

ший функционал. На практике ситуация сложнее. Явно можно выполнить только гауссово интегрирование или интегрирование по фермионным полям, поэтому приходится обращаться к численным методам. Возможно, это и объясняет, почему после работы Вильсона [269], опубликованной в 1975 г., и до последнего времени почти не было получено новых результатов.

Однако за последние два года ситуация резко изменилась. Не только получено подтверждение существования явления конфайнмента, но в результате прогресса, обусловленного введением на решетку фермионов, были вычислены с хорошей точностью ($\sim 30\%$) различные фундаментальные величины (включая вакуумные средние $\langle \alpha G^2 \rangle$, $\langle \bar{q}q \rangle$ и, в частности, значения m_ρ , m_π , f_π). К сожалению, мы не можем подробно обсудить это направление в теории поля и, таким образом, опустим все волнующие результаты, достигнутые на этом пути. Заинтересованному читателю следует обратиться к работам [79, 164, 188, 197], где имеются ссылки на дальнейшую литературу.

2. $1/N$ -разложение

В квантовой хромодинамике число цветов кварков равно трем, но теория упрощается, если число цветов N устремить к бесконечности [250, 251]. К счастью, в этом пределе основные свойства теории сохраняются, а поправки $O(1/N)$ малы. Основная проблема состоит в том, что никто не знает, как вычислить член даже нулевого порядка теории возмущений. Однако это не означает бесполезности данного подхода; он позволяет установить связь с так называемым топологическим разложением в адронной физике [68, 224], проливает некоторый свет на проблему $U(1)$ и, возможно, может иметь отношение к проблеме конфайнмента. Можно также использовать $1/N$ -разложение для получения качественных оценок различных эффектов. Например, ожидается, что масса нуклона (скажем протона) равна $N\Lambda$, поэтому эффекты, связанные с массой мишени, имеют величину $O(N^2\Lambda^2)$, в то время как эффекты, вызванные операторами высших твистов (твиста 4), имеют величину $O(N\Lambda^2)$. Следовательно, в ведущем порядке по $1/N$ последними поправками по сравнению с поправками на массу мишени можно пренебречь. Аналогично на качественном уровне можно понять вырождение по массам ρ - и ω -мезонов или отсутствие связанных состояний в спектре $\pi\pi$ -системы. Обзор этой проблемы и ссылки на литературу читатель найдет в работах [274, 275].

3. Модели мешков

Можно почти с уверенностью говорить, что в настоящее время большинство физиков рассматривают модель мешков как некоторое удобное при решении частных задач приближение к квантовой хромодинамике.

Идея модели мешков состоит в следующем: если кварки (и глюоны) удерживаются на некотором среднем расстоянии δ , то можно имитировать действие удерживающих сил, налагая граничные условия, заключающиеся в том, что кварковые $q(x)$ и глюонные $B(x)$ поля тождественно обращаются в нуль за пределами сферы радиуса δ . Остальные эффекты КХД можно рассматривать по теории возмущений.

Модель мешков хорошо зарекомендовала себя в различных феноменологических приложениях: не только при вычислении статических величин (масс и магнитных моментов различных адронов), но и при получении абсолютной нормировки структурных функций $f(x, Q_0^2)$ [177]. Описание так называемой модели мешка МТ ссылки на дальнейшую литературу заинтересованный читатель найдет в обзоре [167].

Другой подход, связанный с моделью мешков, состоит в рассмотрении струн. В этой модели кварки и глюоны удерживаются не внутри мешка, а вдоль струны, существование которой связывается с успехами струнной динамики [144] (см. также [204]).

4. Инфракрасные свойства КХД

В то время как ультрафиолетовый предел квантовой хромодинамики, по-видимому, хорошо изучен, возможно так же хорошо (если даже не лучше), как ультрафиолетовый предел в квантовой электродинамике, очень немногое известно об инфракрасных свойствах этой теории. В рамках КХД нет ничего похожего на теорему Тирринга [245] или анализ Блоха – Нордсика [42], которые, по существу, и позволяют рассматривать в КХД эффекты, связанные с большими расстояниями, классически; результаты же, подобные теореме Ли – Ноенберга [191], обладают очень узкой применимостью¹⁾. Мы ограничимся ссылками лишь на работы [201, 277], где рассматриваются некоторые аспекты проблемы инфракрасных свойств КХД.

5. Функциональные методы

Много лет назад Швингер и Дайсон получили систему функциональных уравнений, выражающих в замкнутом виде уравнения квантовой теории поля. (Эти уравнения можно найти в книгах [40, 45].) Хотя эти уравнения, конечно, нельзя решить точно, можно попытаться найти самосогласованные непертурбативные решения, совместимые с явлением конфайнмента. Даже после усечения

¹⁾ В самом деле, модели мешков или струн можно рассматривать как способы обойти проблему инфракрасных свойств КХД, тесно связанную с вопросом о конфайнменте.

уравнений это представляет собой трудную, хотя, возможно, и небезнадежную задачу [196].

6. Свободные кварки и глюоны

Доказать существование явления конфайнмента, по-видимому, очень сложно, возможно, потому, что оно не существует. Следует всегда помнить, что имеются серьезные кандидаты на роль свободных кварков [187]. Как следовало бы изменить КХД, чтобы решить этот вопрос и сохранить уже достигнутое? Схема, предложенная ранее Пати и Саламом, не согласуется с результатами современных экспериментов, главным образом вследствие целочисленного заряда кварков. Возможно, наиболее привлекательной является схема, предложенная в работе [93].

7. КХД при высокой температуре

В настоящей книге мы рассматривали квантовую хромодинамику только при нулевой температуре, т.е. мы не требовали, чтобы большое число кварков и глюонов было заключено внутри малого объема с высокой плотностью энергии. Кроме самостоятельного интереса, который представляет изучение КХД при конечной температуре, в космологии существуют ситуации (типа очень тяжелых звезд или Большого взрыва), где такое требование может оказаться необходимым. Более того, похожие ситуации, по-видимому, могут быть получены лабораторным путем в процессах столкновений тяжелых ионов. Заинтересованного читателя мы отсылаем к обзору [159].

8. Потенциальные модели

Важным вопросом, совершенно не затронутым в книге, является рассмотрение стимулированных квантовой хромодинамикой конституентных моделей адронов, хотя своих первых успехов кварковая модель добилась именно в этом направлении. Есть две причины, побудившие меня не включать в книгу такие модели. Во-первых, хотя КХД необходима для выяснения некоторых особенностей этих моделей, тем не менее при современном уровне развития теории трудно обосновать с какой-либо степенью строгости делаемые при этом допущения. Во-вторых, недавно вышла книга [123], посвященная именно этому кругу вопросов.

9. Поправки КХД к электрослабым процессам

Помимо того, что можно назвать "чистой" адронной физикой, КХД позволяет оценить поправки к электрослабым процессам, обусловленные сильными

взаимодействиями. В известном смысле так же можно интерпретировать поправки КХД к чисто партонной картине e^+e^- -аннигиляции или глубоконеупругому рассеянию. Но теперь мы имеем в виду поправки к процессам типа нелептонных или полуплептонных распадов тяжелых кварков, включая (частичное) объяснение правила отбора $\Delta I = 1/2$, чистого механизма ГИМ или распада протона. Заинтересованный этим кругом вопросов читатель найдет дальнейшие сведения и соответствующие ссылки на литературу в обзорах [11, 132].

Приложение А

АЛГЕБРА γ - МАТРИЦ В D - МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Матрицы γ выбираются в виде квадратных матриц размерности 4. В D -мерном пространстве мы имеем набор γ -матриц

$\gamma^0, \gamma^1, \dots, \gamma^{D-1}$ и матрицу $\gamma_5^{(1)}$. Они удовлетворяют антикоммутационным соотношениям

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad \gamma_5^2 = 1,$$

где

$$g^{\mu\nu} = 0, \quad \mu \neq \nu, \quad g^{00} = 1, \quad g^{ii} = -1 \quad \text{for } i = 1, \dots, D-1.$$

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}.$$

$$S_{\mu\nu\alpha\beta} = g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} + g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha} - g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}, \quad A_\mu = g_{\mu\nu}A^\nu, \quad A = \gamma_\mu A^\mu.$$

Имеют место следующие полезные соотношения:

$$\text{Tr } \gamma^\mu \gamma^\nu = 4g^{\mu\nu}, \quad \text{Tr } \gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu = 0, \quad \text{Tr } \gamma^\mu \dots \gamma^\tau = 0, \quad \text{Tr } \gamma_5 \gamma^\mu \dots \gamma^\tau = 0,$$

$$\text{Tr } \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta = 4S^{\mu\nu\alpha\beta} = 4\{g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta} + g^{\mu\beta}g^{\nu\alpha} - g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\};$$

$$aa = a^2; \quad ab \bar{a} = -a^2 \bar{b} + 2(a \cdot b)a,$$

$$\gamma_\mu \gamma^\mu = D, \quad \gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\mu = (2-D)\gamma^\alpha; \quad \gamma_\mu \gamma_5 \gamma^\mu = -D\gamma_5;$$

$$\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma_\mu = 4g^{\alpha\beta} + (D-4)\gamma^\alpha \gamma^\beta,$$

$$\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\delta \gamma_\mu = -2\gamma^\delta \gamma^\beta \gamma^\alpha + (4-D)\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\delta,$$

где $S_{\mu\nu\alpha\beta} = g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} + g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha} - g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}$, $A_\mu = g_{\mu\nu}A^\nu$, $A = \gamma_\mu A^\mu$. Для случая четырехмерного пространства $D = 4$ матрица γ_5 определяется в виде $\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. Введя полностью антисимметричный тензор $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ так, что

$$\epsilon^{0123} = -1, \quad \epsilon_{0123} = +1,$$

¹⁾ Дополнительные сведения о матрице γ_5 можно найти в § 7 и 33.

а остальные компоненты получаются циклической перестановкой индексов, можно записать следующие соотношения:

$$\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu = S^{\mu\alpha\nu} \gamma_\beta - i\epsilon^{\mu\alpha\nu\beta} \gamma_\beta \gamma_5; \quad \gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu = \gamma_5 g^{\mu\nu} + \frac{1}{2i} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \gamma_\alpha \gamma_\beta.$$

$$\text{Tr} \gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma = 4i\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma};$$

$$g_{\alpha\beta} \epsilon^{\alpha\mu\rho\sigma} \epsilon^{\beta\tau\lambda} = -g^{\mu\nu} (g^{\rho\tau} g^{\sigma\lambda} - g^{\rho\lambda} g^{\sigma\tau}) - g^{\mu\lambda} (g^{\rho\nu} g^{\sigma\tau} - g^{\rho\tau} g^{\sigma\nu})$$

$$+ g^{\mu\tau} (g^{\rho\nu} g^{\sigma\lambda} - g^{\rho\lambda} g^{\sigma\nu});$$

$$\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta}{}^{\rho\sigma} = 2(g^{\nu\rho} g^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma}).$$

Кроме того, справедливо равенство $\{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0$. В представлении Паули или Вейля для γ -матриц справедливы соотношения $\gamma_2 \gamma_\mu \gamma_2 = -\gamma_\mu^*$ и $\gamma_0 \gamma_\mu^+ \gamma_0 = \gamma_\mu$, $\gamma_0 (i\gamma_5)^+ \gamma_0 = i\gamma_5$. Наконец, если w_1 и w_2 — спиноры, а $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ — любые матрицы из набора $\gamma_\mu, i\gamma_5$, то выполняется равенство

$$(\bar{w}_1 \Gamma_1 \dots \Gamma_n w_2)^* = \bar{w}_2 \Gamma_n \dots \Gamma_1 w_1.$$

Приложение Б

НЕКОТОРЫЕ ПОЛЕЗНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

В пространстве размерности D справедливы формулы

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \cdot \frac{(k^2)^r}{(k^2 - R^2)^m} = i \frac{(-1)^{r-m}}{(16\pi^2)^{D/4}} \cdot \frac{\Gamma(r + D/2)\Gamma(m - r - D/2)}{\Gamma(D/2)\Gamma(m)(R^2)^{m-r-D/2}};$$

$$\int d^D k \frac{1}{k^2 + i0} = 0; \quad \int d^D k \delta(1 - |k|) = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)}.$$

При интегрировании симметричных по индексам выражений следует воспользоваться равенствами

$$\int d^D k k^\mu k^\nu f(k^2) = \frac{g^{\mu\nu}}{D} \int d^D k k^2 f(k^2);$$

$$\int d^D k k^\mu k^\nu k^\lambda k^\sigma f(k^2) = \frac{g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} + g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda}}{D^2 + 2D} \int d^D k k^4 f(k^2);$$

$$\int d^D k k^{\mu_1} \dots k^{\mu_{2n}} f(k^2) \equiv 0.$$

В пределе $\epsilon \rightarrow 0$ справедливы разложения

$$\Gamma(1 + \epsilon) = 1 - \gamma_E \epsilon + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-\epsilon)^n}{n!} \zeta(n), \quad (R^2)^{\epsilon/2} = 1 + \frac{\epsilon}{2} \log R^2 + O(\epsilon^2);$$

здесь Γ — функции Эйлера, ζ — функция Римана, а константа Эйлера $\gamma_E \approx 0,5772$.

Формулы фейнмановской параметризации имеют вид

$$\frac{1}{A^\alpha B^\beta} = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 dx \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{\{xA + (1-x)B\}^{\alpha+\beta}},$$

$$\frac{1}{A^\alpha B^\beta C^\gamma} = \frac{\Gamma(\alpha + \beta + \gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)} \int_0^1 dx \cdot x \int_0^1 dy \frac{u_1^{\alpha-1} u_2^{\beta-1} u_3^{\gamma-1}}{\{u_1 A + u_2 B + u_3 C\}^{\alpha+\beta+\gamma}},$$

$$u_1 = xy, \quad u_2 = x(1-y), \quad u_3 = 1-x.$$

$$\frac{1}{A^\alpha B^\beta C^\gamma D^\delta} = \frac{\Gamma(\alpha + \beta + \gamma + \delta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)\Gamma(\delta)} \int_0^1 dx \cdot x^2 \int_0^1 dy \cdot y \\ \times \int_0^1 dz \frac{u_1^{\alpha-1} u_2^{\beta-1} u_3^{\gamma-1} u_4^{\delta-1}}{(u_1 A + u_2 B + u_3 C + u_4 D)^{\alpha+\beta+\gamma+\delta}},$$

$u_1 = 1 - x$, $u_2 = xyz$, $u_3 = x(1 - y)$, $u_4 = xy(1 - z)$ и т.д.

В общем случае справедлива формула

$$\frac{1}{A_1 \dots A_n} = (n-1)! \int_0^1 dx_1 \dots \int_0^1 dx_n \delta\left(\sum_1^n x_i - 1\right) \frac{1}{(x_1 A_1 + \dots + x_n A_n)^n}.$$

Более подробную сводку формул можно найти в обзоре [209].

Приведем значения некоторых определенных интегралов

$$\int_0^1 dx \log(1+x) = 2 \log 2 - 1$$

$$\int_0^1 dx \frac{\log(1+x)}{2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Многие часто встречающиеся в приложениях интегралы можно вычислить, используя формулу Эйлера

$$\int_0^1 dx x^\alpha (1-x)^\beta = \frac{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(2+\alpha+\beta)}.$$

Например, дифференцированием получаем отсюда следующие результаты:

$$\int_0^1 dx x^\alpha \log x = \frac{-1}{(\alpha+1)^2};$$

$$\int_0^1 dx x^\alpha (1-x)^\beta \log x = [S_1(\alpha) - S_1(1+\alpha+\beta)] \frac{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(2+\alpha+\beta)},$$

$$\int_0^1 dx \frac{x^\alpha - 1}{1-x} = -S_1(\alpha),$$

$$\int_0^1 dx x^\alpha \log x \log(1-x) = \frac{S_1(1+\alpha)}{(1+\alpha)^2} + \frac{S_2(1+\alpha)}{1+\alpha} - \frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{1}{1+\alpha};$$

$$\int_0^1 dx x^\alpha \frac{\log^2 x}{1-x} = 2\zeta(3) - 2S_3(\alpha),$$

$$\int_0^1 dx \frac{x^\alpha}{1-x} \log x \log(1-x) = \frac{\pi^2}{6} S_1(\alpha) - S_1(\alpha)S_2(\alpha) - S_3(\alpha) + \zeta(3),$$

$$\int_0^1 dx x^\alpha (1-x)^\beta \log x \log(1-x) = \frac{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(2+\alpha+\beta)} \left\{ S_2(1+\alpha+\beta) - \frac{\pi^2}{6} + [S_1(\alpha) - S_1(\alpha+\beta+1)] \right. \\ \left. \times [S_1(\beta) - S_1(\alpha+\beta+1)] \right\},$$

$$\int_0^1 dx x^\alpha (1-x)^\beta \log^2 x = \frac{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(2+\alpha+\beta)} \left\{ [S_1(\alpha) - S_1(\alpha+\beta+1)]^2 \right. \\ \left. + S_2(\alpha+\beta+1) - S_2(\alpha) \right\}$$

и т.д.

Здесь использованы обозначения $S_l(\alpha) = \zeta(l) - \sum_{k=1}^{\infty} [1/(k+\alpha)^l]$, $l > 1$; $S_l(\alpha) = \sum_{j=1}^{\alpha} (1/j^l)$, где α — положительное целое число, а l может принимать любые значения. Заметим, что $S_2(\infty) = \pi^2/6$, а $S_l(\infty) = \zeta(l)$, где ζ — функция Римана. В случае $l = 1$ приведенное выше выражение для функции S_l можно представить в виде ряда $S_1(\alpha) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} [1/(k+\alpha)k] = \sum_{j=1}^{\alpha} (1/j)$, где α — целое положительное число. Функция $S_1(\alpha)$ представима в виде $S_1(\alpha) = \psi(\alpha+1) + \gamma_E$, где $\psi(z) = d \log(\Gamma(z))/dz$. Сведения о специальных функциях Γ , ψ , ζ см. в книге [5].

Приложение В

ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Для группы $SU(3)$ генераторы t^a определяются по формуле $t^a = \lambda^a / 2$, где матрицы λ^a имеют вид

$$\begin{aligned} \lambda^j &= \begin{pmatrix} \sigma^j & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, 3; & \lambda^4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; & \lambda^5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\ \lambda^6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; & \lambda^7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}; & \lambda^8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & -2 \end{pmatrix}; \\ \sigma^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \sigma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, & \sigma^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Можно ввести матрицы C^a , матричными элементами которых являются структурные константы группы $C^a_{abc} = -if_{abc} \equiv -if^{abc}$. Коммутационные соотношения для матриц C^a и t^a имеют вид

$$[t^a, t^b] = i \sum f^{abc} t^c, \quad [C^a, C^b] = i \sum f^{abc} C^c,$$

а антикоммутатор генераторов t^a и t^b имеет вид

$$\{t^a, t^b\} = \sum d^{abc} t^c + \frac{1}{3} \delta^{ab}.$$

Структурные константы группы f полностью антисимметричны по всем индексам, а структурные константы $d_{abc} \equiv d^{abc}$ полностью симметричны по всем индексам. Ниже приводятся все отличные от нуля значения структурных констант f и d :

$$1 = f_{123} = 2f_{147} = 2f_{246} = 2f_{257} = 2f_{345} = -2f_{156} = -2f_{367} = \frac{2}{\sqrt{3}} f_{458} = \frac{2}{\sqrt{3}} f_{678};$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = d_{118} = d_{228} = d_{338} = -d_{888}, \quad \frac{-1}{2\sqrt{3}} = d_{448} = d_{558} = d_{668} = d_{778},$$

$$\frac{1}{2} = d_{146} = d_{157} = d_{247} = d_{256} = d_{344} = d_{355} = -d_{366} = -d_{377}.$$

Для произвольной группы $SU(N)$ инварианты C_A , C_F и T_F определяются формулами

$$\delta_{ab} C_A = \text{Tr } C^a C^b = \sum_{cc'} f^{acc'} f^{bcc'},$$

$$\delta_{ik} C_F = \left(\sum_a t^a t^a \right)_{ik} = \sum_{a,l} t_{il}^a t_{lk}^a,$$

$$\delta_{ab} T_F = \text{Tr } t^a t^b = \sum_{k,i} t_{ik}^a t_{ki}^b.$$

При этом

$$C_A = N, \quad C_F = \frac{N^2 - 1}{2N}, \quad T_F = \frac{1}{2}.$$

В приложениях часто встречаются соотношения

$$\text{Tr } t^a t^b t^c = \frac{i}{4} f^{abc} + \frac{1}{4} d^{abc},$$

а также инварианты

$$\sum_{abc} d_{abc}^2 = \frac{40}{3}, \quad \sum_{abc} f_{abc}^2 = 24, \quad \sum_{rka} \epsilon_{irk} t_{jr}^a t_{kl}^a = -\frac{2}{3} \epsilon_{ijl}.$$

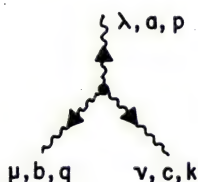
Приложение Г

ФЕЙНМАНОВСКИЕ ПРАВИЛА ДИАГРАММНОЙ ТЕХНИКИ ДЛЯ КХД

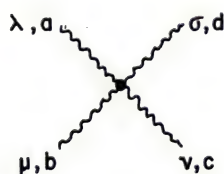
Имеются следующие фейнмановские правила:



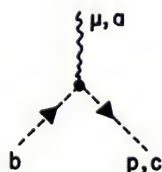
$$ig\gamma_\mu t_{kj}^a$$



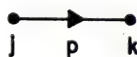
$$-gf^{abc}[(p-q)_\nu g_{\lambda\mu} + (q-k)_\lambda g_{\mu\nu} + (k-p)_\mu g_{\nu\lambda}]$$



$$\begin{aligned} & -ig^2 \sum_e \{ f^{abefcde} (g_{\lambda\nu} g_{\mu\sigma} - g_{\lambda\sigma} g_{\mu\nu}) \\ & + f^{acefbde} (g_{\lambda\mu} g_{\nu\sigma} - g_{\lambda\sigma} g_{\mu\nu}) \\ & + f^{adefcbe} (g_{\lambda\nu} g_{\mu\sigma} - g_{\lambda\mu} g_{\sigma\nu}) \} \end{aligned}$$



$$-gf^{acb}p_\mu$$



$$\frac{i}{\not{p} - m_j + i0} \delta_{jk}$$

$$i \frac{-g^{\mu\nu} + \xi k^\mu k^\nu / (k^2 + i0)}{k^2 + i0} \delta_{ab} \quad (\text{лоренцева калибровка})$$

$$i \frac{-g^{\mu\nu} + (n^\mu k^\nu + n^\nu k^\mu) / n \cdot k - n^2 (k^\mu k^\nu / n \cdot k)}{k^2 + i0} \delta_{ab} \quad (\text{аксиальная калибровка})$$

$$\frac{i}{k^2 + i0} \delta_{ab}$$

При вычислении диаграмм следует добавлять общий множитель $(2\pi)^4 \delta(P_i - P_f)$, описывающий сохранение полного 4-импульса, и коэффициент (-1) на каждую замкнутую фермионную петлю или петлю духов. Статистические множители таковы:

$$\frac{1}{2!} \quad \text{для} \quad \text{---} \text{---} \text{---}$$


$$\frac{1}{3!} \quad \text{для} \quad \text{---} \text{---} \text{---} \quad \text{и т.д.}$$

Каждое интегрирование по петле содержит комбинацию $\int_0^4 d^D k / (2\pi)^D \equiv \int d^D \hat{k}$. Диаграммы с несвязанными графиками не рассматриваются. Читать диаграммы следует против направлений стрелок на ориентированных линиях. Для получения матричных элементов S -матрицы нужно добавить линии, отвечающие начальным и конечным частицам:


$$\begin{array}{c} p, \sigma \\ \longrightarrow \bullet \end{array} \quad (2\pi)^{-3/2} u(p, \sigma)$$

$$\begin{array}{c} p, \sigma \\ \longleftarrow \bullet \end{array} \quad (2\pi)^{-3/2} \bar{v}(p, \sigma)$$


$$\begin{array}{c} k, \lambda \\ \longrightarrow \bullet \end{array} \quad (2\pi)^{-3/2} \epsilon^\mu(k, \lambda)$$




$$(2\pi)^{-3/2} \epsilon^\mu(k, \lambda)^*$$




$$(2\pi)^{-3/2} \bar{u}(p, \sigma)$$



$$(2\pi)^{-3/2} v(p, \sigma)$$



$$(2\pi)^{-3/2} \epsilon^\mu(k, \lambda)^*$$



$$(2\pi)^{-3/2} \epsilon^\mu(k, \lambda)$$

Спиноры и векторы поляризации предполагаются нормированными следующим образом:

$$\sum_{\sigma} u(p, \sigma) \bar{u}(p, \sigma) = \not{p} + m,$$

$$\sum_{\lambda} \epsilon^\mu(k, \lambda)^* \epsilon^\nu(k, \lambda) = -g^{\mu\nu} \text{ (фeyнмановская калибровка).}$$

Эта сводка правил диаграммной техники отличается от правил, приведенных в книге [40], нормировкой спиноров

$$\sum_{\sigma} u_{BD} \bar{u}_{BD} = \frac{\not{p} + m}{2m},$$

а также множителями $(2\pi)^{-3/2}$ вследствие разного определения амплитуд \mathcal{T} и \mathcal{T}_{BD} .

Приложение Д

ФЕЙНМАНОВСКИЕ ПРАВИЛА ДИАГРАММНОЙ ТЕХНИКИ ДЛЯ СОСТАВНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Введем обозначения: $\gamma_+ = 1$, $\gamma_- = \gamma_5$ и Δ — произвольный 4-вектор, удовлетворяющий условию $\Delta^2 = 0$. Тогда фейнмановские правила диаграммной техники для составных операторов имеют вид



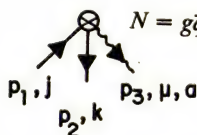
$$N = \bar{q}(0)\gamma^{\mu_1} \dots \partial^{\mu_n}\gamma_{\pm} q(0)$$

$$\Delta(\Delta \cdot k)^{n-1}\gamma_{\pm}$$



$$N = G^{\mu_1\mu_2} \dots \partial^{\mu_n} G$$

$$g_{\mu\nu}(\Delta \cdot k)^n + k^2 \Delta_{\mu} \Delta_{\nu} (\Delta \cdot k)^{n-2} - (k_{\mu} \Delta_{\nu} + \Delta_{\mu} k_{\nu})(\Delta \cdot k)^{n-1}$$



$$N = g \bar{q}_j(0)\gamma^{\mu_1} \dots B_a^{\mu_2 \dots \mu_n} \gamma_{\pm} q_k(0)$$

$$g t_{ij}^a \Delta^{\mu} \Delta \sum_{j=0}^{n-2} (\Delta \cdot p_1)^j (\Delta \cdot p_2)^{n-j-2} \gamma_{\pm}$$



$$N = g G^{\mu\nu} \partial^{\mu_2} \dots B^{\mu_n} \dots G$$

$$\frac{ig}{3!} f_{abc} \left\{ \Delta_{\nu} [\Delta_{\lambda} k_{\mu} (\Delta \cdot p) + p_{\lambda} \Delta_{\mu} (\Delta \cdot k)] \right.$$

$$- g_{\mu\lambda} (\Delta \cdot p) (\Delta \cdot k) - \Delta_{\mu} \Delta_{\lambda} (p \cdot k)]$$

$$+ \sum_{j=1}^{n-2} (-1)^j (\Delta \cdot p)^{j-1} (\Delta \cdot k)^{n-j-2}$$

$$+ [(g_{\mu\lambda} \Delta_{\nu} - \Delta_{\mu} g_{\nu\lambda}) (\Delta \cdot k)$$

$$+ \Delta_{\lambda} (\Delta_{\mu} k_{\nu} - \Delta_{\nu} k_{\mu})] (\Delta \cdot k)^{n-2} \} + \text{перестановки.}$$

См. также работы [125, 126].

Приложение Е

НЕКОТОРЫЕ СИНГУЛЯРНЫЕ ФУНКЦИИ

Причинные функции Грина в координатном пространстве задаются формулами

$$\Delta(x; m^2) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot x} \frac{i}{k^2 - m^2 + i0},$$

$$D_{\xi}^{\mu\nu}(x) = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot x} \frac{-g^{\mu\nu} + \xi k^{\mu} k^{\nu} / (k^2 + i0)}{k^2 + i0},$$

$$S(x; m) = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot x} \frac{k + m}{k^2 - m^2 + i0}.$$

Иногда мы опускаем аргумент m из обозначений функций Δ и S . Эти же функции можно выразить через вакуумные средние от хронологических произведений:

$$\langle T\phi(x)\phi(0) \rangle_0 = \Delta(x; m); \quad \langle Tq^j(x)\bar{q}^k(0) \rangle_0 = \delta^{jk} S(x, m),$$

$$\langle TB_a^{\mu}(x)B_b^{\nu}(0) \rangle_0 = \delta_{ab} D_{\xi}^{\mu\nu}(x).$$

Характер функций Грина ясно представлен уравнениями $(\partial_x^2 + m^2)i\Delta(x-y) = \delta(x-y)$ и т.д. Кроме того, справедливо соотношение

$$S(x, m) = (i\partial + m)\Delta(x, m).$$

На световом конусе справедливы разложения

$$\Delta(x, m^2) \underset{x^2 \rightarrow 0}{\simeq} \frac{-1}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{x^2 - i0} + \frac{im^2\theta(x^2)}{16\pi} + \frac{m^2}{8\pi^2} \log \frac{m|x^2|^{1/2}}{2} + \dots$$

$$S(x) \underset{x^2 \rightarrow 0}{\simeq} \frac{2ix_{\mu}\gamma^{\mu}}{(2\pi)^2(x^2 - i0)^2} + \dots$$

и т.д. Дополнительные соотношения для функций Грина можно найти в книге

[40]¹⁾ Формулы фурье-преобразований распределений приведены в книге [135].
В тексте использованы формулы

$$\int d^4x e^{-ik \cdot x} \frac{1}{x^2 \pm i0} = -4\pi^2 \frac{i}{k^2 \mp i0},$$

$$\int d^4x e^{-ik \cdot x} \frac{1}{(x^2 \pm i0)^2} = -\pi^2 i \log(k^2 \mp i0) + \dots$$

Одновременные коммутационные соотношения и коммутационные соотношения на световом конусе для фермионных операторов имеют вид

$$\{q_\alpha^i(x), q_\beta^k(x)\} = 0; \quad \delta(x^0 - y^0) \{q_\alpha^i(x), q_\beta^k(y)^+\} = \delta_{\alpha\beta} \delta_{ik} \delta(x - y),$$

$$\{q_\alpha(x), \bar{q}_\beta(0)\} \underset{x^2 \rightarrow 0}{\simeq} (\partial - im)_{\alpha\beta} \left\{ \frac{1}{2\pi} \epsilon(x^0) \delta(x^2) - \frac{m}{4\pi\sqrt{x^2}} \theta(x^2) \epsilon(x^0) + \dots \right\}.$$

¹⁾ Наши причинные функции отличаются от причинных функций, введенных в книге [40], множителем $i: S = i S_{BD}, D = i D_{BD}$ и т.д.

Приложение Ж

КИНЕМАТИКА, СЕЧЕНИЯ РАССЕЯНИЯ И СКОРОСТИ РАСПАДОВ

Векторы состояния, описывающие частицу со спиральностью λ и импульсом p , нормированы следующим образом¹⁾:

$$\langle p', \lambda' | p, \lambda \rangle = 2p^0 \delta_{\lambda\lambda'} \delta(\vec{p} - \vec{p}'), \quad P^\mu |p, \lambda\rangle = p^\mu |p, \lambda\rangle.$$

Это соответствует плотности частиц на единицу объема

$$\rho(p) = \frac{2p^0}{(2\pi)^3}.$$

Амплитуда рассеяния \mathcal{T} связана с S -матрицей соотношением

$$S = 1 + i\mathcal{T}, \quad \langle f | \mathcal{T} | i \rangle = \delta(P_f - P_i) F(i \rightarrow f).$$

В случае, когда в начальном состоянии присутствуют две частицы с массами m_1 и m_2 , сечение рассеяния имеет вид

$$d\sigma(i \rightarrow f) = \frac{2\pi^2}{\lambda^{1/2}(s, m_1^2, m_2^2)} \delta(P_f - P_i) |F(i \rightarrow f)|^2 \frac{d\vec{p}_{f1}}{2p_{f1}^0} \cdots \frac{d\vec{p}_{fn}}{2p_{fn}^0},$$

где введены обозначения

$$\lambda(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc, \quad s = P_i^2.$$

В случае $p_1 + p_2 \rightarrow p'_1 + p'_2$ приведенная выше формула принимает вид

$$\frac{d\sigma(i \rightarrow f)}{dt} = \frac{\pi^3}{\lambda(s, m_1^2, m_2^2)} |F(i \rightarrow f)|^2,$$

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{cm}} = \frac{\pi^2}{4s} \cdot \frac{q'}{q} |F(i \rightarrow f)|^2,$$

$$\sigma(i \rightarrow \text{all}) = [4\pi^2 / \lambda^{1/2}(s, m_1^2, m_2^2)] \text{Im } F(i \rightarrow i).$$

¹⁾ При этом трансформационные свойства произвольного поля таковы:
 $U(a) \Phi(x) U^{-1}(a) = \Phi(x + a), \quad U(a) = e^{iPa}.$

Здесь использованы обозначения

$$t = (p_2 - p_2')^2, \quad q = |\vec{p}_{1\text{cm}}| = \frac{\lambda^{1/2}(s, m_1^2, m_2^2)}{2s^{1/2}},$$

$$q' = |\vec{p}_{1'\text{cm}}| = \frac{\lambda^{1/2}(s, m_1'^2, m_2'^2)}{2s^{1/2}},$$

$$\Omega_{\text{cm}} \approx (\theta_{\text{cm}}, \phi_{\text{cm}}), \quad d\Omega = d\cos\theta d\phi.$$

Аналогично скорость распада можно выразить в виде¹⁾

$$d\Gamma(i \rightarrow f) = \frac{1}{4\pi m_i} \delta(P_i - P_f) |F(i \rightarrow f)|^2 \frac{d\vec{p}_{f1}}{2p_{f1}^0} \dots \frac{d\vec{p}_{fn}}{2p_{fn}^0}, \quad P_i = \begin{pmatrix} m_i \\ \vec{0} \end{pmatrix}.$$

Всюду используются единицы, в которых $\hbar = c = 1$. Приведем некоторые полезные формулы перехода к другим системам единиц:

$$1 \text{ МэВ}^{-1} = 1,973 \cdot 10^{-11} \text{ см} = 6,582 \cdot 10^{-22} \text{ с}.$$

$$1 \text{ ГэВ}^{-2} = 0,3894 \text{ мбарн}.$$

$$1 \text{ МэВ} = 1,783 \cdot 10^{-27} \text{ г} = 1,602 \cdot 10^{-6} \text{ эрг}.$$

$$1 \text{ см} = 5,068 \cdot 10^{10} \text{ МэВ}^{-1}, \quad 1 \text{ с} = 1,519 \cdot 10^{21} \text{ МэВ}^{-1}.$$

$$1 \text{ мбарн} = 2,568 \text{ ГэВ}^{-2}.$$

$$1 \text{ г} = 5,610 \cdot 10^{26} \text{ МэВ}, \quad 1 \text{ эрг} = 6,242 \cdot 10^5 \text{ МэВ}.$$

¹⁾ Все формулы справедливы как для нетождественных, так и для тождественных частиц. Но при вычислении полных ширин полученное выражение необходимо разделить на число тождественных перестановок. Например, если мы интегрируем по импульсам j тождественных бозонов или фермионов, то полученное выражение нужно разделить на $j!$.

Приложение 3

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

Функционал представляет собой отображение пространства достаточно гладких функций $\{f(x)\}$ в пространстве комплексных чисел:

$$F: f \rightarrow F[f].$$

Отметим, что отображение F не обязательно должно быть линейным. Таким же образом мы будем трактовать и функционалы от нескольких функций $F[f, g, \dots]$. Функционалы можно рассматривать как обобщение понятия обычной функции в следующем смысле. Разобьем пространство значений¹⁾ x на N ячеек, и пусть в каждой ячейке находится единственное значение x_j . Тогда функционал $F[f]$ представляет собой предел, к которому стремится функция $F_N(f_1, \dots, f_j, \dots)$, где $f_j \equiv f(x_j)$, при стремлении размера ячейки к нулю. Производная $\partial F_N / \partial f_j$ определяется формулой

$$\frac{\partial F_N(f_1, \dots, f_j, \dots)}{\partial f_j} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F_N(f_1, \dots, f_j + \epsilon, \dots) - F_N(f_1, \dots, f_j, \dots)}{\epsilon},$$

т.е. Она может быть получена сдвигом $f_i \rightarrow f_i + \epsilon \delta_{ij}$. Поэтому мы определяем функциональную производную как предел

$$\frac{\delta F[f]}{\delta f(y)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F[f + \epsilon \delta_y] - F[f]}{\epsilon},$$

где δ_y есть δ -функция, обращающаяся в бесконечность в точке y : $\delta_y(x) = \delta(x - y)$. Важный частный случай представляет собой функционал, задаваемый интегралом

$$F[f] = \int dx K_F(x) f(x);$$

¹⁾ Мы берем это пространство таким, что оно имеет конечный размер L . Иначе необходимо выполнить дополнительный предельный переход $L \rightarrow \infty$.

тогда функциональная производная имеет вид

$$\frac{\delta F[f]}{\delta f(y)} = K_F(y).$$

Понятие ряда Тейлора можно обобщить и на функциональные ряды. Если ядра K_n — симметричные (или антисимметричные в случае фермионных переменных f) функции своих аргументов, то легко убедиться, что для функционала

$$F[f] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dx_1 \dots dx_n K_n(x_1, \dots, x_n) f(x_1) \dots f(x_n),$$

n -я функциональная производная имеет вид

$$K_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta^n F[f]}{\delta f(x_1) \dots \delta f(x_n)}.$$

Процедурой, связанной с функциональной производной, является функциональное интегрирование. Функциональный интеграл определяется формулой

$$\int \prod_x df(x) F[f] \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \int df_1 \dots df_N F_N(f_1, \dots, f_N).$$

Как и в случае функционального дифференцирования, процедура функционального интегрирования подчиняется правилам, аналогичным правилам выполнения обычного интегрирования. При функциональном дифференцировании и при функциональном интегрировании, чтобы учесть антикоммутиционный характер функций f , требуется некоторая модификация приведенных выше соотношений. Эта модификация описана в § 39.

Функциональные производные от выражений, не содержащих интегралы, можно найти, переписав их в интегральном виде. Например, легко вычислить функциональную производную, фигурирующую в формуле (41.9), для которой результат имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\delta \partial B_a(x)}{\delta B_b^p(y)} &= \frac{\delta}{\delta B_b^p(y)} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \sum_c \int d^4z \delta(z-x) \delta_{ac} B_c^\mu(z) \\ &= \delta_{ab} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \delta(x-y). \end{aligned}$$

Приложение И

КАЛИБРОВОЧНО-ИНВАРИАНТНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ОПЕРАТОРОВ

Интуитивно ясно, что в калибровочных теориях в выражениях, подобных выражениям, возникающим в методе операторного разложения:

$$\bar{q}(0)q(x) = \sum \frac{x^{\mu_1} \dots x^{\mu_n}}{n!} \bar{q}(0) \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n} q(0),$$

обычные производные следует заменить на ковариантные производные: $\partial^\mu \rightarrow D^\mu$. Здесь мы кратко приводим формальное доказательство того, как возникают такие замены. В случае взаимодействующих полей их пропагаторы не являются пропагаторами свободных частиц. Например, пропагатор фермиона, помещенного в глюонное поле, удовлетворяет уравнению

$$(i\not{D} - m)S_{\text{int}}(x, y) = i\delta(x - y),$$

которое получается непосредственно из лагранжиана. Сохраняя только наиболее сингулярные члены (члены низшего твиста), решение этого уравнения можно записать в виде

$$S_{\text{int}}(x, y) \approx \left\{ P \exp i \int_y^x dz_\mu \sum t^a B_a^\mu(z) \right\} S(x - y),$$

где S — пропагатор свободного фермионного поля, а P — упорядочение вдоль траектории, соединяющей точки x и y . Если теперь выполнить операторное разложение, учитывая указанные обстоятельства, то окажется, что вместо произведения операторов $\bar{q}(x)q(y)$ возникает калибровочно-инвариантная комбинация

$$\bar{q}(x) \left\{ P \exp i \int_y^x dz_\mu \sum t^a B_a^\mu(z) \right\} q(y),$$

разложение которой в ряд в случае $x \approx y$ и приводит к рассмотренным выше членам, содержащим вместо обычной ковариантную производную. Конечно, это справедливо и для операторов, построенных из глюонных полей. Дополнительные сведения о калибровочно-инвариантных произведениях операторов см. в статьях [106, 269].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Abad J., Humpert B.*, Phys. Lett., **B77**, 105 (1978).
2. *Abarbanel H.D., Goldberger M.L., Treiman S.B.*, Phys. Rev. Lett., **22**, 500, (1969).
3. *Abbott L.F.*, Nucl. Phys., **B185**, 189 (1981).
4. *Abbott L.F., Atwood W.B., Barnett R.M.*, Phys. Rev. **D22**, 582 (1980).
5. *Abramowicz M., Stegun I.E.*, Eds. Handbook of Mathematical Functions. — New York: Dover, 1965 [Имеется перевод: Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М.Абрамовица и И.Стиган. — М.: Наука, 1979.]
6. *Adler S.L.*, Phys. Rev., **143**, 1144 (1966).
7. *Adler S.L.*, Phys. Rev., **177**, 2426 (1969).
8. *Adler S.L.* — In: Lectures in Elementary Particle and Quantum Field Theory (Deser, Grisaru and Pendleton, eds.), MIT Press, 1971.
9. *Adler S.L., Bardeen W.A.*, Phys. Rev., **182**, 1517 (1969).
10. *Ali A.*, Phys. Lett., **110B**, 67 (1982).
11. *Altarelli G.*, Phys. Reports, **81C**, 1 (1982).
12. *Altarelli G., Parisi G.*, Nucl. Phys., **B126**, 298 (1977).
13. *Altarelli G., Ellis R.K., Martinelli G.*, Nucl. Phys., **B143**, 521 (1978); Erratum, **B146**, 544 (1978).
14. *Altarelli G., Ellis R.K., Martinelli G.*, Nucl. Phys., **B157**, 461 (1979).
15. *Amati D. et al.*, Nucl. Phys., **B173**, 429 (1980).
16. *Anderson H.L. et al.*, Phys. Rev., **D20**, 2645 (1979).
17. *Appelquist T., Carrazzone J.*, Phys. Rev., **D11**, 2865 (1975).
18. *Appelquist T., Georgi H.*, Phys. Rev., **D8**, 4000 (1973).
19. *Appelquist T., Politzer H.D.*, Phys. Rev. Lett., **34**, 43 (1975).
20. *Aubert J.J. et al.*, Phys. Lett., **105B**, 315 (1981).
21. *Baluni V.*, Phys. Rev., **D19**, 2227 (1979).
22. *Barbieri R. et al.*, Phys. Lett., **57B**, 455 (1975).
23. *Barbieri R. et al.*, Nucl. Phys., **B117**, 50 (1976).
24. *Barbieri R. et al.*, Nucl. Phys., **B154**, 535 (1979).
25. *Bardeen W.A.*, Nucl. Phys., **B75**, 246 (1974).

26. *Bardeen W.A., Buras A.J.*, Phys. Rev., **D20**, 166 (1979).
27. *Bardeen W.A. et al.*, Phys. Rev., **D18**, 3998 (1978).
28. *Barger V.D., Cline D.B.*, Phenomenological Theories of High Energy Scattering. — New York: Benjamin, 1969.
29. *Barnett R.M., Dine M., McLerran L.*, Phys. Rev., **D22**, 594 (1980).
30. *Bartels J.* — In: Quantum Chromodynamics (Alonso and Tarrach, eds.) — Berlin: Springer, 1979.
31. *Baulieu L. et al.*, Phys. Lett., **81B**, 224 (1979).
32. *Becchi C., Rouet A., Stora R.*, Phys. Lett., **52B**, 344 (1974).
33. *Becchi C., Rouet A., Stora R.*, Commun. Math. Phys., **42**, 127 (1975).
34. *Becchi C. et al.*, Zs. Phys., **C8**, 335 (1981).
35. *Белафин А. и др.*, Phys. Lett., **59B**, 85 (1975).
36. *Bell J.S., Jackiw R.*, Nuovo Cimento, **60A**, 47 (1969).
37. *Березин Ф.А.* Метод вторичного квантования. — М.: 1965.
38. *Bernabeu J., Tarrach R., Ynduráin F.J.*, Phys. Lett., **79B**, 464 (1979).
39. *Bjorken J.D.*, Phys. Rev., **179**, 1547 (1969).
40. *Bjorken J.D., Drell S.D.*, Relativistic Quantum Fields. — London: McGraw-Hill, 1965. [Имеется перевод: Бьеркен Дж.Д., Дрелл С.Д. Релятивистская квантовая теория. — М.: Мир, 1978.]
41. *Bjorken J.D., Paschos E.A.*, Phys. Rev., **185**, 1975 (1969).
42. *Bloch F., Nordsiek A.*, Phys. Rev., **52**, 54 (1937).
43. *Bodek A. et al.*, Phys. Rev., **D20**, 1471 (1979).
44. *Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Тодоров И.Т.* Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. — М.: Наука, 1969.
45. *Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В.* Введение в теорию квантованных полей. 4-е изд., исправл. — М.: Наука, 1984.
46. *Bohr N., Rosenfeld L.*, Kong. Dansk Vid. Selsk. Matt.-Fys. Medd., **12**, No 8. (1933).
47. *Bohr N., Rosenfeld L.*, Phys. Rev., **78**, 794 (1950).
48. *Bollini C.G., Gianbiagi J.J.*, Phys. Lett., **40B**, 566 (1972).
49. *Bollini C.G., Gianbiagi J.J., González-Dominguez A.*, Nuovo Cimento, **31**, 550 (1964).
50. *Brandt R., Preparata G.*, Ann. Phys. (N.Y.), **61**, 119 (1970).
51. *Brandt R., Preparata G.*, Nucl. Phys., **B27**, 541 (1971).
52. *Brodsky S.J., Farrar G.*, Phys. Rev. Lett., **31**, 1153 (1973).
53. *Brodsky S.J. et al.*, Phys. Lett., **91B**, 239 (1980).
54. *Brodsky S.J., Lepage G.P.*, Phys. Rev., **D22**, 2157 (1980).
55. *Buras A.J.*, Rev. Mod. Phys., **52**, 199 (1980).
56. *Buras A.J.* — In: Topical Questions in QCD, Phys. Scripta, **23**, No 5 (1981).
57. *Buras A.J., Gaemers K.J.F.*, Nucl. Phys., **B132**, 249 (1978).

58. *Cabibbo N., Parisi G., Testa M.*, Nuovo Cimento Lett., **4**, 35 (1970).
59. *Callan C.G.*, Phys. Rev., **D2**, 1541 (1970).
60. *Callan C.G., Coleman S., Jackiw R.*, Ann. Phys. (N.Y.), **59**, 42 (1970).
61. *Callan C.G., Dashen R., Gross D.J.*, Phys. Lett., **66B**, 375 (1976).
62. *Callan C.G., Gross D.J.*, Phys. Rev. Lett., **22**, 156 (1969).
63. *Calvo M.*, Phys. Rev., **D15**, 730 (1977).
64. *Caswell W.E.*, Phys. Rev. Lett., **33**, 224 (1974).
65. *Caswell W.E., Wilczek F.*, Phys. Lett., **49B**, 291 (1974).
66. *Cerveró J., Jacobs L., Nohl C.*, Phys. Lett., **69B**, 351 (1977).
67. *Четыркин К.Г., Камаев А.Л., Ткачев Ф.В.*, Phys. Lett., **85B**, 277 (1979).
68. *Chew G.F., Rozenzweig C.*, Phys. Reports, **C41**, No 5 (1978).
69. *Christ N., Lee T.D.*, Phys. Rev., **D22**, 939 (1980).
70. *Christ N., Hasslacher B., Muller A.*, Phys. Rev., **D6**, 3543 (1972).
71. *Ciaffalloni M., Curci G.*, Phys. Lett., **102B**, 352 (1981).
72. *Coleman S.*, J. Math. Phys., **7**, 787 (1966).
73. *Coleman S., Gross D.J.*, Phys. Rev. Lett., **31**, 851 (1973).
74. *Collins J.C., Duncan A., Joglekar S.D.*, Phys. Rev., **D16**, 438 (1977).
75. *Coquereaux R.*, Ann. Phys. (N.Y.), **125**, 401 (1980).
76. *Coquereaux R.*, Phys. Rev., **D23**, 1365 (1981).
77. *Cornwall J.M., Norton R.E.*, Phys. Rev., **177**, 2584 (1969).
78. *Corrigan E., Fairlie D.B.*, Phys. Lett., **67B**, 69 (1977).
79. *Creutz M.* — In: Topical Questions in QCD, Phys. Scripta, **23**, No 5 (1981).
80. *Crewther R.J.*, Phys. Rev. Lett., **28**, 1421 (1972).
81. *Crewther R.J.*, Riv. Nuovo Cimento, **2**, No 8, (1979).
82. *Crewther R.J.* — In: Field Theoretical Methods in Elementary Particle Physics, Proc. Kaiserlautern School, 1979.
83. *Crewther R.J., Di Vecchia P., Veneziano G., Witten E.*, Phys. Lett., **88B**, 123; Erratum, **91B**, 487 (1980).
84. *Curci G., Furmanski W., Petronzio R.*, Nucl. Phys., **B175**, 27 (1980).
85. *De Alfaro V., Fubini S., Furlan G.*, Phys. Lett., **65B**, 163 (1976).
86. *De Alfaro V., Fubini S., Furlan G.*, Phys. Lett., **72B**, 203 (1977).
87. *De Groot J.G. et al.*, Zs. Phys., **C1**, 143 (1979).
88. *De Rújula A. et al.*, Nucl. Phys., **B138**, 387 (1978).
89. *De Rújula A., Georgi H., Glashow S.L.*, Phys. Rev., **D12**, 147 (1975).
90. *De Rújula A., Georgi H., Politzer H.D.*, Ann. Phys. (N.Y.), **103**, 315 (1977).
91. *De Rújula A., Georgi H., Politzer H.D.*, Phys. Rev., **D15**, 2495 (1977).
92. *De Rújula A., Glashow S.L.*, Phys. Rev. Lett., **34**, 46 (1975).
93. *De Rújula A., Giles R.G., Jaffe R.*, Phys. Rev., **17D**, 285 (1978).
94. *De Witt B.*, Relativity, Groups and Topology, Blakie and Son, London, 1964, p. 587.

95. *Dine M., Sapiirstein J.*, Phys. Rev. Lett., **43**, 668 (1979).
96. *Di Giacomo A., Rossi G.C.*, Phys. Lett., **100B**, 481 (1981).
97. *Dixon J.A., Taylor J.C.*, Nucl. Phys., **B78**, 552 (1974).
98. *Докшицер Ю.Л., Дьяконов Д.И., Троин С.И.*, Phys. Reports, **C58**, 269 (1980).
99. *Dominguez C.A.*, Phys. Rev. Lett., **41**, 605 (1978).
100. *Drell S.D., Yan T.M.*, Ann. Phys. (N.Y.), **66**, 578 (1971).
101. *Duncan A.* — In: Topical Questions in QCD, Phys. Scripta, **23**, No 5 (1981).
102. *Duncan A., Muller A.*, Phys. Lett., **93B**, 119 (1980).
103. *Duncan A., Muller A.*, Phys. Rev., **D21**, 1636 (1980).
104. *Eden R.J. et al.*, The Analytic S-Matrix, Cambridge University Press, 1966.
105. *Ефремов А.В., Радюшкин А.В.*, Phys., Lett., **94B**, 245 (1980).
106. *Ефремов А.В., Радюшкин А.В.*, Riv. Nuovo Cimento, **3**, No 2 (1980).
107. *Ellis J.* — In: Weak and Electromagnetic Interactions at High Energy. — Amsterdam: North-Holland, 1976.
108. *Ellis J., Gaillard M.K.*, Nucl. Phys., **B150**, 141 (1979).
109. *Ellis J., Sachrajda C.T.* — In: Quarks and Leptons (M.Lévy et al., eds.). — London: Plenum Press, 1980, p. 285.
110. *Ellis R.K. et al.*, Nucl. Phys., **B152**, 285 (1979).
111. *Epstein H., Glaser V., Martin A.*, Commun. Math. Phys., **13**, 257 (1969).
112. *Фаддеев Л.Д.* — In: Methods in Field Theory (Balian and Zinn-Justin, eds.). — Amsterdam: North-Holland, 1976.
113. *Фаддеев Л.Д., Попов Ю.Н.*, Phys. Lett., **25B**, 29 (1967).
114. *Фаддеев Л.Д., Славнов А.А.* Введение в квантовую теорию калибровочных полей. — М.: Наука, 1978.
115. *Farhi*, Phys. Rev. Lett., **39**, 1587 (1977).
116. *Farrar G., Jackson D.R.*, Phys. Rev. Lett., **43**, 246 (1979).
117. *Ferrara S., Gatto R., Grillo A.F.*, Phys. Rev., **D5**, 5102 (1972).
118. *Feynman R.P.*, Acta Phys. Polonica, **24**, 697 (1963).
119. *Feynman R.P.*, Phys. Rev. Lett., **23**, 1415 (1969).
120. *Feynman R.P.*, Photon Hadron Interactions. — New York: Benjamin, 1972. [Имеется перевод: *Фейнман Р.П.* Взаимодействие фотонов с адронами. — М.: Мир, 1975.]
121. *Feynman R.P., Hibbs A.R.*, Quantum Mechanics and Path Integrals. — New York: McGraw-Hill, 1965. [Имеется перевод: *Фейнман Р.П., Хибс А.* Квантовая механика и интегралы по траектории. — М.: Мир, 1968.]
122. *Feynman R.P., Field R.D.*, Phys. Rev., **D15**, 2590 (1977).
123. *Flamm D., Schoberl F.*, Introduction to the Quark Model of Elementary Particles. — New York: Gordon and Breach, 1981.
124. *Floratos E.G., Kounnas C., Lacaze R.*, Nucl. Phys., **B192**, 417 (1981).

125. *Floratos E.G., Ross D.A., Sachrajda C.T.*, Nucl. Phys., **B129**, 66 (1977);
Erratum, **B139**, 545 (1978).
126. *Floratos E.G., Ross D.A., Sachrajda C.T.*, Nucl. Phys., **B152**, 493 (1979).
127. *Forgács P., Horváth Z., Palla L.*, Phys. Rev. Lett., **46**, 392 (1981).
128. *Fritzsche H., Gell-Mann M.* — In: Broken Scale Invariance and the Light Cone
(Dal Cin, Iverson, and Perlmutter, eds.). — London: Gordon and Breach, 1971.
129. *Fritzsche H., Gell-Mann M.*, Proc. XVI Int. Conf. on High Energy Physics,
Vol. 2, p. 135, Chicago, 1972.
130. *Fritzsche H., Gell-Mann M., Leutwyler H.*, Phys. Lett., **B47**, 365 (1973).
131. *Furmanski W., Petronzio R.*, Phys. Lett., **97B**, 437 (1980).
132. *Gaillard M.K.*, Proc. SLAC Summer Institute on Particle Physics, 1978.
133. *Gaillard M.K., Lee B.W.*, Phys. Rev., **D10**, 897 (1974).
134. *Gastmans R., Meuldermans M.*, Nucl. Phys., **B63**, 277 (1973).
135. *Гельфонд И.М., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции и действия над ними. —
М.: Физматгиз, 1959.
136. *Gell-Mann M.*, Caltech preprint CTSL-20, 1961, не опубликовано.
137. *Gell-Mann M.*, Phys. Rev., **125**, 1067 (1962).
138. *Gell-Mann M.*, Phys. Lett., **8**, 214, (1964).
139. *Gell-Mann M.*, Physics, **1**, 63 (1964).
140. *Gell-Mann M., Low F.*, Phys. Rev., **95**, 1300 (1954).
141. *Gell-Mann M., Oakes R.J., Renner B.*, Phys. Rev., **175**, 2195 (1968).
142. *Georgi H., Politzer H.D.*, Phys. Rev., **D9**, 416 (1974).
143. *Georgi H., Politzer H.D.*, Phys. Rev., **D14**, 1829 (1976).
144. *Gervais J.-L., Neveu A.*, Nucl. Phys., **46B**, 381 (1972).
145. *Glashow S.L.*, — In: Hadrons and Their Interactions. — New York: Academic
Press, 1968, p. 83.
146. *Glashow S.L., Iliopoulos J., Maiani L.*, Phys. Rev., **D2**, 1285 (1970).
147. *Glashow S.L., Weinberg S.*, Phys. Rev. Lett., **20**, 224 (1968).
148. *Goldstone J.*, Nuovo Cimento, **19**, 154 (1961).
149. *González-Arroyo A., López C.*, Nucl. Phys., **B166**, 429 (1980).
150. *González-Arroyo A., López C., Ynduráin F.J.*, Nucl. Phys., **B153**, 161 (1979).
151. *González-Arroyo A., López C., Ynduráin F.J.*, Nucl. Phys., **B174**, 474 (1980).
152. *Gordon B.A. et al.*, Phys. Rev., **D20**, 2643 (1979).
153. *Gottlieb J.*, Nucl. Phys., **B139**, 125 (1978).
154. *Greenberg O.W.*, Phys. Rev. Lett., **13**, 598 (1964).
155. *Грибов В.Н., Лунатов И.Н.*, Ядерная физика, **15**, 438 (1972).
156. *Gross D.J.*, Phys. Rev. Lett., **32**, 1071 (1974).
157. *Gross D.J.*, — In: Methods in Field Theory (Balian and Zinn-Justin, eds.). —
Amsterdam: North-Holland, 1976.
158. *Gross D.J., Llewellyn Smith C.H.*, Nucl. Phys., **B14**, 337 (1969).

159. Gross D.J., Pisarski R.D., Yaffe L.G., Rev. Mod. Phys., **53**, 43 (1981).
160. Gross D.J., Wilczek F., Phys. Rev. Lett., **30**, 1323 (1973).
161. Gross D.J., Wilczek F., Phys. Rev., **D8**, 3635 (1973).
162. Gross D.J., Wilczek F., Phys. Rev., **D9**, 980 (1974).
163. Gürsey F., Radicati L.A., Phys. Rev. Lett., **13**, 173 (1964).
164. Hamber H., Parisi G., Phys. Rev. Lett., **47**, 1792 (1981).
165. Han M., Nambu Y., Phys. Rev., **B 139**, 1006 (1965).
166. Harada K., Muta T., Phys. Rev., **D22**, 663 (1980).
167. Hasenfratz P., Kuti J., Phys. Reports, **C75**, 1 (1978).
168. Hinchliffe I., Llewellyn Smith C.H., Nucl. Phys., **B128**, 93 (1977).
169. Hubschmid W., Mallik S., Nucl. Phys., **B193**, 368 (1981).
170. Humpert B., Neerven W.L., Nucl. Phys., **B184**, 225 (1981).
171. Иогффе Б.Л., Nucl. Phys., **B188**, 317 (1981).
172. Itzykson C., Zuber J.B., Quantum Field Theory. — New York: McGraw-Hill, 1980. [Имеется перевод: Ициксон К., Зюбер Ж.-Б. Квантовая теория поля. М.: Мир, 1984.]
173. Izuka J., Okada K., Shito D., Progr. Theor. Phys., **35**, 1061 (1966).
174. Jackiw R., Nohl C., Rebbi C., Phys. Rev. **D15**, 1642 (1977).
175. Jackiw R., Rebbi C., Phys. Rev., **D13**, 3398 (1976).
176. Jacob M., Landshoff P., Phys. Reports, **C48**, 285 (1978).
177. Jaffe R., Ross G.G., Phys. Lett., **93B**, 313 (1980).
178. Jaffe R., Soldate M., Phys. Lett., **105B**, 467 (1981).
179. Jones D.T.R., Nucl. Phys., **B75**, 730 (1974).
180. Jost R., Luttinger J., Helvetica Physica Acta, **23**, 201 (1950).
181. Kingsley R.L., Nucl. Phys., **B60**, 45 (1973).
182. Kinoshita T., J. Math. Phys., **3**, 650 (1962).
183. Kluberg-Stern H., Zuber J.B., Phys. Rev., **D12**, 467 (1975).
184. Kubar-André J., Paige F.E., Phys. Rev., **D19**, 221 (1979).
185. Kummer W., Acta Physica Austriaca, **41**, 315 (1975).
186. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. — М.: Физматгиз, 1963.
187. LaRue G.S., Phillips J.D., Fairbank W.M., Phys. Rev. Lett., **46**, 967 (1981).
188. Lautrup B., Nauenberg M., — In: Topical Questions in QCD, Phys., Scripta, **23**, No 5 (1981).
189. Lee B.W. — In: Methods in Field Theory (Balian and Zinn-Justin, eds.). — Amsterdam: North-Holland, 1976.
190. Lee B.W., Zinn-Justin J., Phys. Rev., **D5**, 3121 (1972).
191. Lee T.D., Nauenberg M., Phys. Rev., **133**, B1549 (1964).
192. Leutwyler H., Nucl. Phys., **B76**, 413 (1974).
193. Llewellyn Smith C.H., Phys. Reports, **C3**, 261 (1972).

194. *López C., Ynduráin F.J.*, Nucl. Phys., **B183**, 157 (1981).
195. *Mackenzie P.B., Lepage G.P.*, Phys. Rev. Lett., **47**, 1244 (1981).
196. *Mandelstam S.*, Phys. Rev., **D20**, 3223 (1979).
197. *Marinari E., Rebhi C.*, Phys. Rev. Lett., **47**, 1795 (1981).
198. *Marshak R.E., Riazuddin, Ryan C.P.*, Theory of Weak Interactions in Particle Physics. — New York: Wiley, 1969.
199. *Martin F.*, Phys. Rev., **D19**, 1382 (1979).
200. *Méndez A.*, Nucl. Phys., **B145**, 199 (1978).
201. *Muller A.*, Phys. Rev., **D18**, 3705 (1978).
202. *Nachtmann O.*, Nucl. Phys., **B63**, 237 (1973).
203. *Nambu Y.*, Phys. Rev. Lett., **4**, 380 (1960).
204. *Nambu Y.*, Proc. Int. Conf. on High Energy Physics, Tokyo, 1978, p. 971.
205. *Nambu Y., Jona-Lasinio G.*, Phys. Rev., **122**, 345 (1961).
206. *Nambu Y., Jona-Lasinio G.*, Phys. Rev., **124**, 246 (1961).
207. *Nanopoulos D.V.*, Nuovo Cimento Lett., **8**, 873 (1973).
208. *Nanopoulos D.V., Ross D.*, Nucl. Phys., **B157**, 273 (1979).
209. *Narison S.*, Phys. Reports, **C82**, 263 (1982).
210. *Narison S., de Rafael E.*, Phys. Lett., **103B**, 57 (1981).
211. *Ne'eman Y.*, Nucl. Phys., **26**, 222, (1961).
212. *Okubo S.*, Phys. Lett., **5**, 165 (1963).
213. *Pagels H.*, Phys. Reports, **C16**, 219 (1975).
214. *Pais A.*, Phys. Rev. Lett., **13**, 175 (1964).
215. *Parisi G.*, Phys. Letters, **84B**, 225 (1979).
216. *Pascual P., de Rafael E.*, Zs. Phys., **C12**, 127 (1982).
217. *Peccei R.D., Quinn H.R.*, Phys. Rev., **16**, 1751 (1977).
218. *Politzer H.D.*, Phys. Rev. Lett., **30**, 1346 (1973).
219. *Поляков А.М.*, Nucl. Phys., **120B**, 429 (1977).
220. *Preparata G.*, Proc. Int. Conf. on High-Energy Physics, Vol. 1, CERN, Geneva, 1979
221. *de Rafael E.*, Lectures on Quantum Electrodynamics, Universidad Autónoma de Barcelona, UAB-FT-D1.
222. *de Rafael E.*, — In: Quantum Chromodynamics (Alonso and Tarrach, eds.). — Berlin: Springer, 1979.
223. *Reinders L., Rubinstein H., Yazaki S.*, Nucl. Phys., **B186**, 475 (1981).
224. *Rossi G., Veneziano G.*, Nucl. Phys., **B123**, 507 (1977).
225. *Riordan E.M. et al.*, SLAC Report SLAC-PUB 1634 (1978).
226. *Sachrajda C.T.* — In: Quantum Chromodynamics (Alonso and Tarrach, eds.). — Berlin: Springer, 1979.
227. *Sciuto S.*, Riv. Nuovo Cimento, **2**, No 8 (1979).
228. *Scadron M.D.* Rev. Progr. Phys., **44**, 213 (1981).

229. Шифман М.А., Вайнштейн А.И., Захаров В.И., Nucl. Phys., **B147**, 385 (1979).
230. Шифман М.А., Вайнштейн А.И., Захаров В.И., Nucl. Phys., **B147**, 448 (1979).
231. Siegel W., Phys. Lett., **84B**, 193 (1979).
232. Славнов А.А., ЭЧАЯ, **5**, 303 (1975).
233. Speer E.R., J. Math. Phys., **9**, 1404 (1968).
234. Steinberger J., Phys. Rev., **76**, 1180 (1949).
235. Sterman G., Libby S., Phys. Rev., **D18**, 3252, 4737 (1978).
236. Sterman G., Weinberg S., Phys. Rev. Lett, **39**, 1436 (1977).
237. Stückelberg E.C.G., Peterman A., Helvetica Physica Acta, **26**, 499, (1953).
238. Sutherland D.G., Nucl. Phys. **B2**, 433 (1967).
239. Symanzik K., Commun. Mat. Phys., **18**, 227 (1970).
240. Symanzik K., Commun. Mat. Phys., **34**, 7 (1973).
241. Тарасов О.В., Владимиров А.А., Жарков А., Phys. Lett., **93B**, 429 (1980).
242. Tarrach R., Nucl. Phys., **B183**, 384 (1981).
243. Tarrach R., Nucl. Phys., **B196**, 45 (1982).
244. Taylor J.C., Nucl. Phys., **B33**, 436 (1971).
245. Thirring W., Phil. Magazine, **41**, 113 (1950).
246. Titchmarsh E.C., Theory of Functions, Oxford University Press, 1939.
247. Tomboulis E., Phys. Rev., **D8**, 2736 (1973).
248. 't Hooft G., Nucl. Phys., **B33**, 173 (1971).
249. 't Hooft G., Nucl. Phys, **B61**, 455 (1973).
250. 't Hooft G., Nucl. Phys., **B72**, 461, (1974).
251. 't Hooft G., Nucl. Phys., **B75**, 461 (1974).
252. 't Hooft G., Phys. Rev. Lett., **37**, 8 (1976).
253. 't Hooft G., Veltman M., Nucl. Phys., **B44**, 189 (1972).
254. Вайнштейн А.И. и др., Ядерная физика, **27**, 514 (1978).
255. Veltman M., Proc. Roy. Soc. (London), **A301**, 107 (1967).
256. Walsh T.F., Zerwas P., Phys. Lett., **B44**, 195 (1973).
257. Weinberg S., Phys. Rev. Lett., **31**, 494 (1973).
258. Weinberg S., Phys. Rev., **D8**, 3497 (1973).
259. Weinberg S., Phys. Rev., **D11**, 3583 (1975).
260. Weinberg S. — In: A Festschrift for I.I. Rabi. — New York: New York Academy of Sciences, 1978.
261. Weinberg S., Phys. Rev. Lett., **40**, 223 (1978).
262. Weinberg S., Phys. Lett., **91B**, 51 (1980).
263. Wess J., Zumino B., Phys. Lett., **37B**, 95 (1971).
264. Wiener N., J. Math. and Phys., **2**, 131 (1923).
265. Wiik B., Wolf G., Electron-Positron Interactions. — Berlin: Springer-Verlag, 1979.
266. Wilczek F. — In: Quark Confinement and Field Theory (Stump and Weingartner, eds.). — New York: J. Wiley, 1977.

267. *Wilczek F.*, Phys. Rev. Lett., **40**, 279 (1978).
268. *Wilson R.*, Phys. Rev., **179**, 1499 (1969).
269. *Wilson R.*, Phys. Rev., **D10**, 2445 (1975).
270. *Wilson R., Zimmermann W.*, Commun. Math. Phys., **24**, 87 (1972).
271. *Witten E.*, Nucl. Phys., **B 104**, 445 (1976).
272. *Witten E.*, Nucl. Phys., **B 120**, 189 (1977).
273. *Witten E.*, Nucl. Phys., **B 156**, 269 (1979).
274. *Witten E.*, Nucl. Phys., **B 160**, 57 (1979).
275. *Witten E.*, Physics Today, July 1980, p. 38.
276. *Yang C.N., Mills R.L.*, Phys. Rev., **96**, 191 (1954).
277. *Zachariasen F.* — In: Hadronic Matter at Extreme Density (Cabibbo and Sertorio, eds.). — New York: Plenum Press, 1980, p. 313.
278. *Zee A.*, Phys. Rev., **D8**, 4038 (1973).
279. *Zee A., Wilczek F., Treiman S.B.*, Phys. Rev., **D10**, 2881 (1974).
280. *Zepeda A.*, Phys. Rev. Lett., **41**, 139 (1978).
281. *Zimmermann W.* — In: Lectures in Elementary Particles and Field Theory, M.I.T. Press, 1970.
282. *Zweig G.*, CERN preprints Th. 401 and 412, 1964, не опубликовано.

Литература, добавленная при переводе

283. *Андреев А.В.* Хромодинамика и жесткие процессы при высоких энергиях. — М.: Наука, 1981.
284. *Gasser J., Leutwyler H.*, Phys. Rep., **87**, 77 (1982).

Обзоры, опубликованные в журнале "Успехи физических наук"

- Глешоу Ш.* Кварки с цветом и ароматом. — УФН, 1976, т. 119, с. 715.
- Берестецкий В.Б.* Нуль-заряд и асимптотическая свобода. — УФН, 1976, т. 120, с. 439.
- Вайнштейн А.И., Волошин М.Б., Захаров В.И., Новиков В.А., Окунь Л.Б., Шифман М.А.* Чармоний и квантовая хромодинамика. — УФН, 1977, т. 123, с. 217.
- Арбузов Б.А., Логунов А.А.* Строение элементарных частиц и связи между различными силами природы. — УФН, 1977, т. 123, с. 505.
- Иллиопулос Дж.* Введение в калибровочные теории. — УФН, 1977, т. 123, с. 565.
- Намбу Й.* Почему нет свободных кварков? — УФН, 1978, т. 124, с. 147.
- Владимиров А.А., Ширков Д.В.* Ренормализационная группа и ультрафиолетовые асимптотики. — УФН, 1979, т. 129, с. 407.
- Мастиян С.Г.* На пути объединения слабых, электромагнитных и сильных взаимодействий. — УФН, 1980, т. 130, с. 3.
- Гелл-Манн М., Рамон П., Сланский Р.* Цветовая симметрия, электрические за-

- ряды и стабильность протона в единых калибровочных теориях. — УФН, 1980, т. 130, с. 459.
- Дремин И.М.* О глюонных струях. — УФН, 1980, т. 131, с. 537.
- Бергман П.* Единые теории поля. — УФН, 1980, т. 132, с. 177.
- Азимов Я.И., Докшицер Ю.Л., Хозе В.А.* Глюоны. — УФН, 1980, т. 132, с. 443.
- Переломов А.М.* Решения типа инстантонов в киральных моделях. — УФН, 1981, т. 134, с. 577.
- Т'Хоофт Г.* Калибровочные теории сил между элементарными частицами. — УФН, 1981, т. 135, с. 479.
- Джорджи Х.* Единая теория элементарных частиц. — УФН, 1982, т. 136, с. 287.
- Вайнштейн А.И., Захаров В.И., Новиков В.А., Шифман М.А.* Инстантонная азбука. — УФН, 1982, т. 136, с. 553.
- Филиппов А.Т.* Спектроскопия легких мезонов. — УФН, 1982, т. 137, с. 201.
- Блум Е.Д., Фелдман Г.Дж.* Кварконий. — УФН, 1983, т. 139, с. 529.
- Хозе В.А., Шифман М.А.* Тяжелые кварки. — УФН, 1983, т. 140, с. 3.
- Быков А.А., Дремин И.М., Леонидов А.В.* Потенциальные модели кваркония. — УФН, 1984, т. 143, с. 3.
- Макеенко Ю.М.* Метод Монте-Карло в калибровочных теориях на решетке. — УФН, 1984, т. 143, с. 161.
- Кройц М.* Физика высоких энергий. — УФН, 1984, т. 143, с. 256.
- Обзоры, опубликованные в журнале "Элементарные частицы и атомное ядро"
- Говорков А.Б.* Цветные степени свободы в адронной физике. — ЭЧАЯ, 1977, т. 8, с. 1056.
- Барбашов Б.М., Нестеренко В.В.* Динамика релятивистской струны. — ЭЧАЯ, 1978, т. 9, с. 709, 989.
- Лезнов А.Н., Савельев М.В.* Точные цилиндрически-симметричные решения классических уравнений калибровочных теорий для произвольных компактных групп Ли. — ЭЧАЯ, 1980, т. 11, с. 40.
- Филиппов А.Т.* Нетривиальные решения нелинейных задач теории поля. — ЭЧАЯ, 1980, т. 11, с. 735.
- Красников Н.В., Матвеев В.А., Тавхелидзе А.Н.* Проблема CP -инвариантности в квантовой хромодинамике. — ЭЧАЯ, 1981, т. 12, с. 100.
- Лезнов А.Н., Савельев М.В.* Точные решения для цилиндрически-симметричных конфигураций калибровочных полей. — ЭЧАЯ, 1981, т. 12, с. 125.
- Вайнштейн А.И., Захаров В.И., Новиков В.А., Шифман М.А.* Квантовая хромодинамика и масштабы адронных масс. — ЭЧАЯ, 1982, т. 13, с. 542.
- Радюшкин А.В.* Анализ жестких инклюзивных процессов в квантовой хромодинамике. — ЭЧАЯ, 1983, т. 14, с. 58.

- Логунов А.А., Мествиришвили М.А., Петров В.А.* Инклюзивные процессы и динамика сильных взаимодействий. — ЭЧАЯ, 1983, т. 14, с. 493.
- Пронько Г.П., Разумов А.В., Соловьев Л.Д.* Классическая динамика релятивистской струны. — ЭЧАЯ, 1983, т. 14, с. 558.
- Ширков Д.В.* Квантовые симметрии во взаимодействиях элементарных частиц. ЭЧАЯ, 1983, т. 14, с. 1063.
- Говорков А.Б.* Парастатистика и внутренние симметрии. — ЭЧАЯ, 1983, т. 14, с. 1229.
- Гришин В.Г.* Образование резонансов и струй адронов во взаимодействиях частиц высоких энергий и структура адронов. — ЭЧАЯ, 1984, т. 15, с. 178.
- Первушин В.Н.* О физическом вакууме в КХД. — ЭЧАЯ, 1984, т. 15, с. 1073.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода	5
Предисловие	7
 Глава I. Общие сведения.	9
§ 1. Как возникла квантовая хромо- динамика	9
§ 2. Теория возмущений. S -матрица и функции Грина; теорема Вика	15
 Глава II. Квантовая хромодинамика как теория поля	22
§ 3. Калибровочная инвариантность	22
§ 4. Каноническое квантование, фиксация калибровки, ковариантные калиб- ровки	25
§ 5. Унитарность, лоренцевы калибровки, духи, физические калибровки	29
§ 6. Преобразования Бекши — Роуета — Стора	36
§ 7. Размерная регуляризация.	40
§ 8. Общие сведения о процедуре пере- нормировок.	45
§ 9. Перенормировки в КХД (однопетле- вое приближение)	51
§ 10. Глобальные симметрии лагранжиана КХД; сохраняющиеся токи	62
§ 11. Ренормализационная группа	65
§ 12. Уравнение Каллана — Симанзика.	68
§ 13. Перенормировка составных опера- торов	70

§ 14. Бегущая константа связи и бегущая масса в КХД; асимптотическая свобода	74
--	----

Глава III. Процессы глубоконеупругого рассеяния. . . 79

§ 15. $e^+ e^-$ -аннигиляция в адроны	79
§ 16. Зависимость параметров теории и вычислений от выбора перенормиро- вочной схемы	84
§ 17. Кинематика процессов глубоконе- упругого рассеяния; партонная модель	87
§ 18. Операторное разложение	93
§ 19. Применение операторного разложе- ния к процессам глубоконеупругого рассеяния; моменты.	102
§ 20. Ренормгрупповой анализ; уравнения КХД для моментов.	108
§ 21. Уравнения КХД для моментов во втором порядке теории возмуще- ний	112
§ 22. Метод Алтарелли — Паризи	119
§ 23. Общие свойства структурных функ- ций в КХД	127
§ 24. Сравнение с экспериментом; пара- метризации, согласующиеся с КХД, и точечноподобная эволюция струк- турных функций.	136
§ 25. Поправки на массу мишени.	142
§ 26. Непертурбативные эффекты в $e^+ e^-$ -аннигиляции и операторы выс- ших твистов в процессах глубоко- неупругого рассеяния.	145
§ 27. Другие процессы.	148

Глава IV. Массы кварков, частичное сохранение аксиального тока, киральная динамика и вакуум КХД.	164
---	-----

§ 28. Тяжелые и легкие кварки; теорема Симанзика — Appelqvista — Кар- радзе.	164
§ 29. Массовые члены и свойства ин- вариантности; киральная инвариант- ность.	167
§ 30. Симметрии Вигнера — Вейля и Намбу — Голдстоуна.	173
§ 31. Частичное сохранение аксиального тока и отношения масс кварков ...	175
§ 32. Ограничения на массы легких квар- ков и оценки для них.	179
§ 33. Распад $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$; аксиальная анома- лия.	182
§ 34. Распады мезонов: эффекты, обуслов- ленные массами кварков.	191
§ 35. Пертурбативные эффекты и эффек- ты, обусловленные спонтанным на- рушением киральной симметрии, в кварковом и глюонном пропага- торах.	196
§ 36. Массы адронов.	199
§ 37. Проблема $U(1)$; глюонная анома- лия.	202
§ 38. Параметр θ , вакуум КХД, эффект безмассовых кварков и решение проблемы $U(1)$	205

Глава V. Функциональные методы. Решения, не опи- сываемые теорией возмущений.

§ 39. Формулировка теории поля на языке интегралов по траекториям.	213
§ 40. Приближение ВКБ в формализме интегралов по траекториям; тун- нелирование.	220
§ 41. Формализм функциональных интегра- лов в квантовой хромодинамике; калибровочная инвариантность.	223

§ 42. Фейнмановские правила диаграммной техники	228
§ 43. Евклидова формулировка квантовой хромодинамики	233
§ 44. Инстантоны	236
§ 45. Связь инстантонных решений с вакуумом КХД и топологическим квантовым числом	241
§ 46. Вопросы, не рассмотренные в книге	247
Приложение А. Алгебра γ -матриц в D -мерном пространстве	252
Приложение Б. Некоторые полезные интегралы	254
Приложение В. Теоретико-групповые соотношения	257
Приложение Г. Фейнмановские правила диаграммной техники для КХД	259
Приложение Д. Фейнмановские правила диаграммной техники для составных операторов	262
Приложение Е. Некоторые сингулярные функции	263
Приложение Ж. Кинематика, сечения рассеяния и скорости распадов	265
Приложение З. Функциональные производные	267
Приложение И. Калибровочно-инвариантное произведение операторов	269
Литература	270

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ !

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, Москва, И-110, ГСП, 1 Рижский пер., д. 2, издательство "Мир".

Монография

Ф. Индурайн

КВАНТОВАЯ ХРОМОДИНАМИКА

Введение в теорию кварков и глюонов

Научный редактор Н. Л. Телеснин

Мл. научн. редакторы Р. Х. Зацепина, В. Н. Цлаф

Художник М. Г. Федоров

Технический редактор Т. К. Такташова

Корректор И. С. Голубева

ИБ № 5343

Подписано к печати 18.03.86.

Формат 60 x 90/16. Бумага офсетная № 1.

Печать офсетная. Объем 9,00 бум. л.

Усл. печ. л. 18,00. Усл. кр.-отт. 18,24.

Уч.-изд. л. 15,94. Изд. № 2/3810.

Тираж 4500 экз. Зак. 206. Цена 2 р. 50 коп.

Набрано в издательстве "Мир" на участке оперативной полиграфии
129820, ГСП, Москва, 1-й Рижский пер., 2.

Тульская типография Союзполиграфпрома при Государственном
комитете СССР по делам издательств, полиграфии и
книжной торговли.

300600, Тула, проспект им. В. И. Ленина, 109.

ИЗДАТЕЛЬСТВО "МИР"
ВЫПУСТИТ В 1987 г. КНИГУ:

Ченг Т.-П., Ли Л.-Ф. Калибровочные теории элементарных частиц.
Пер. с англ., 38 л., 5 р. 60.к.

В книге дано современное изложение калибровочных теорий элементарных частиц. Общая часть включает квантование полей методом континуального интеграла, теорию перенормировок, ренормгруппы, элементы теории групп. Излагаются модели алгебры токов, спонтанное нарушение симметрии, аномалии. Основная часть книги посвящена собственно калибровочным теориям. Здесь помимо квантовой хромодинамики и теории электрослабого взаимодействия изложены модели техницвета, теория Великого объединения, теория солитонов и инстантонов.

Для студентов, аспирантов и лиц, изучающих теорию элементарных частиц, для специалистов, нуждающихся в справочном пособии по калибровочным теориям элементарных частиц.

Уважаемый читатель!

Заказы на книги издательства "Мир" принимаются в магазинах научно-технической литературы.

ПОМНИТЕ !

Тираж книг определяется числом собранных заказов. Только своевременно оформленный заказ гарантирует Вам приобретение интересующих Вас книг.

ИЗДАТЕЛЬСТВО "МИР"
ВЫПУСТИТ В 1987 г. КНИГУ:

Кройц М. Кварки, глюоны и решетки. Пер. с англ., 10 л., 1 р. 50 к.

Книга является первой в мировой литературе монографией, посвященной сравнительно новому и бурно развивающемуся направлению теоретической физики — решеточному подходу в теории калибровочных полей (теория поля на решетке) и представляет собой доступное введение в предмет.

Для физико-теоретиков, специализирующихся в области физики высоких энергий, статистической физики, математиков, специалистов в области численного моделирования, а также аспирантов и студентов.

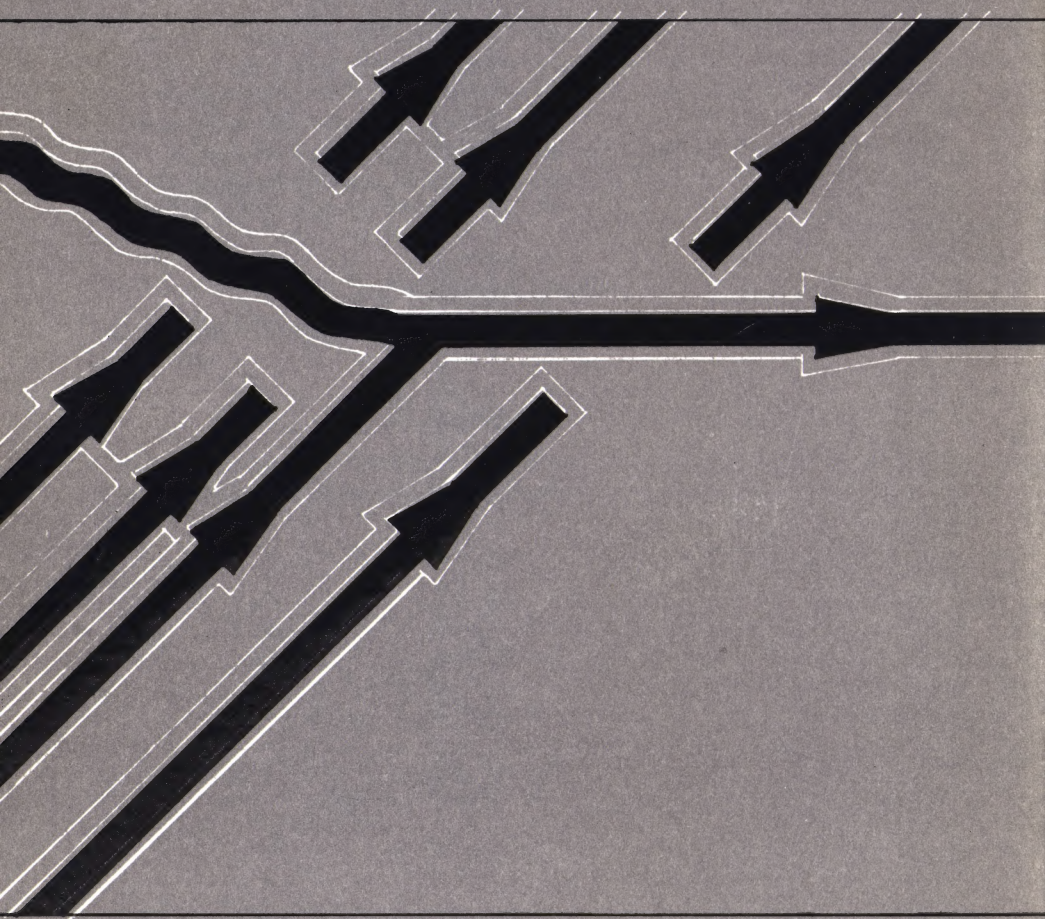
Уважаемый читатель!

Заказы на книги издательства "Мир" принимаются в магазинах научно-технической литературы.

ПОМНИТЕ!

Тираж книг определяется числом собранных заказов. Только своевременно оформленный заказ гарантирует Вам приобретение интересующих Вас книг.

Цена 2 р. 50 коп.





Ф.И.ВРАЙН

КВАНТУМНАЯ

ХРОМОГРАФИЯ

М.КА